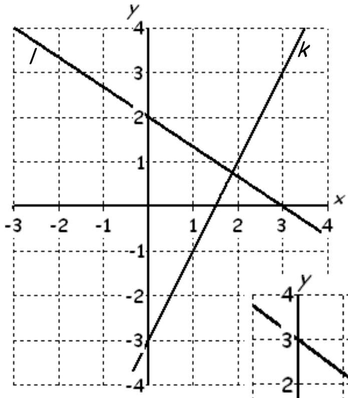
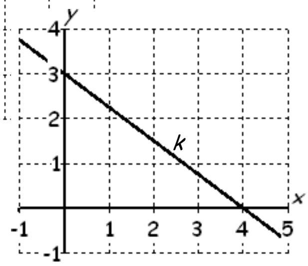




1a k: $y = 2x - 3$ gaat door $(0, -3)$ $(2 \cdot 0 - 3 = -3)$ en $(1, -1)$ $(2 \cdot 1 - 3 = -1)$.
l: $2x + 3y = 6$ gaat door $(0, 2)$ $(0 + 3 \cdot 2 = 6)$ en $(3, 0)$ $(2 \cdot 3 + 0 = 6)$.
Zie de lijnen in de figuur hiernaast.

1b $y = 2x - 3 \Rightarrow -2x + y = -3$ of $2x - y = 3$ of $4x - 2y = 6$ of ...

1c $2x + 3y = 6 \Rightarrow 3y = -2x + 6 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$.

2a k: $3x + 4y = 12$ gaat door $(0, 3)$ $(0 + 4 \cdot 3 = 12)$ en $(4, 0)$ $(3 \cdot 4 + 0 = 12)$.
Zie de grafiek van k in de figuur rechts hiernaast.

2b k: $3x + 4y = 12$ gaat door $A(8, -3)$ $(3 \cdot 8 + 4 \cdot -3 = 24 - 12 = 12)$.
k: $3x + 4y = 12$ gaat niet door $B(5, -1)$ $(3 \cdot 5 + 4 \cdot -1 = 15 - 4 \neq 12)$.
k: $3x + 4y = 12$ gaat door $C(-6, 7\frac{1}{2})$ $(3 \cdot -6 + 4 \cdot 7\frac{1}{2} = -18 + 30 = 12)$.
k: $3x + 4y = 12$ gaat door $D(2p, 3 - 1\frac{1}{2}p)$ $(3 \cdot 2p + 4 \cdot (3 - 1\frac{1}{2}p) = 6p + 12 - 6p = 12)$.

2c $x = q$ en $y = q + 1$ invullen in $3x + 4y = 12 \Rightarrow 3q + 4(q + 1) = 12 \Rightarrow 3q + 4q + 4 = 12 \Rightarrow 7q = 8 \Rightarrow q = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$.

2d l: $3x + 4y = c$ door $(5, 6) \Rightarrow 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = c \Rightarrow 15 + 24 = c \Rightarrow 39 = c$. Dus l: $3x + 4y = 39$.

2e m: $3x + 4y = c$ door $(p, 2p) \Rightarrow 3 \cdot p + 4 \cdot 2p = c \Rightarrow 3p + 8p = c \Rightarrow 11p = c$. Dus m: $3x + 4y = 11p$.

3a k: $2x + 3y = 12$ snijden met de x-as $(y = 0) \Rightarrow 2x + 0 = 12 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow$ snijpunt met de x-as is $(6, 0)$.
k: $2x + 3y = 12$ snijden met de y-as $(x = 0) \Rightarrow 0 + 3y = 12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow$ snijpunt met de y-as is $(0, 4)$.

3b $2x + 3y = 12 \Rightarrow \frac{2x}{12} + \frac{3y}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$.

3c k: $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ snijden met de x-as $(y = 0) \Rightarrow \frac{x}{6} + 0 = 1 \Rightarrow x = 1 \cdot 6 = 6$ (de 6 onder de x).
k: $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ snijden met de y-as $(x = 0) \Rightarrow 0 + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 1 \cdot 4 = 4$ (de 4 onder de y).

4a l: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ snijden met de x-as $(y = 0) \Rightarrow \frac{x}{a} + 0 = 1 \Rightarrow x = a \Rightarrow$ snijpunt met de x-as is $(a, 0)$.

4b l: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ snijden met de y-as $(x = 0) \Rightarrow 0 + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow y = b \Rightarrow$ snijpunt met de y-as is $(0, b)$.

5a k: $y - 3 = 2(x - 4) \Rightarrow y - 3 = 2x - 8 \Rightarrow y = 2x - 5 \Rightarrow \text{rc}_k = 2$.

5b k: $y - 3 = 2(x - 4)$ gaat door $(4, 3)$ want $3 - 3 = 2(4 - 4)$ (immers $0 = 2 \cdot 0$).

5c l: $y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - y_A = mx - mx_A \Rightarrow y = mx - mx_A + y_A \Rightarrow \text{rc}_l = m$.
l: $y - y_A = m(x - x_A)$ gaat door $A(x_A, y_A)$ want $y_A - y_A = m(x_A - x_A)$ (immers $0 = m \cdot 0$).

5d m: $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$ gaat door $A(x_A, y_A)$ want $y_A - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_A - x_A)$ (immers $0 = m \cdot 0$).
m: $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$ gaat door $B(x_B, y_B)$ want $y_B - y_A = \frac{y_B - y_A}{\cancel{x_B - x_A}}\cancel{(x_B - x_A)}$.

6 $\begin{cases} 4x + 3y = 12 \text{ ❶} \\ 3x - y = -9 \text{ ❷} \end{cases} \begin{vmatrix} \times 1 \\ \times 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 12 \text{ ❶} \\ 9x - 3y = -27 \text{ ❸} \end{cases} +$

$13x = -15 \Rightarrow x = -\frac{15}{13}$ in❷ $\Rightarrow 3 \cdot -\frac{15}{13} - y = -9 \Rightarrow -y = -\frac{72}{13} \Rightarrow y = \frac{72}{13}$.

```
-9+3*15/13▸Frac
            -72/13
▮
```

7a k: $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$ of $x - 2y = 2$ en l: $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$ of $3x - 5y = 15$.

7b $\begin{cases} x - 2y = 2 \text{ ❶} \\ 3x - 5y = 15 \text{ ❷} \end{cases} \begin{vmatrix} \times 3 \\ \times 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 6 \text{ ❸} \\ 3x - 5y = 15 \text{ ❷} \end{cases} -$

$-y = -9 \Rightarrow y = 9$ in❶ $\Rightarrow x - 2 \cdot 9 = 2 \Rightarrow x = 20$.

8a k: $y - 1 = \frac{3-1}{4-2}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = x - 2 \Rightarrow y = x - 1$ en l: $y - 0 = \frac{0-5}{4--1}(x - 4) \Rightarrow y = -(x - 4) \Rightarrow y = -x + 4$.

8b $\begin{cases} y = x - 1 \text{ ❶} \\ y = -x + 4 \text{ ❷} \end{cases} +$

$2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ in❶ $\Rightarrow 1\frac{1}{2} = x - 1 \Rightarrow -x = -2\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2\frac{1}{2}$.

9a Jan mist de verticale lijn door (0, 3), want er is bij $y = ax + 3$ geen waarde van a die de lijn $x = 0$ (de y-as) oplevert.
Harm mist de horizontale lijn door (0, 3), want er is bij $\frac{x}{p} + \frac{y}{3} = 1$ geen waarde van p die de lijn $y = 3$ oplevert.

9bc Je mist de verticale lijn $x = 4$ door (4, 0).

10a k_p: $y = -2x + p$ is een lijn met $\text{rc}_k = -2$ door $(0, p)$.

10b l_p: $y - 4 = p(x + 6)$ is een lijn door (–6, 4) met $\text{rc}_l = p$.

10c m_p: $px + 3y = 6 \Rightarrow 3y = -px + 6 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}px + 2$ is een lijn door (0, 2) met $\text{rc}_m = -\frac{1}{3}p$.

10d n_p: $\frac{x}{p} + \frac{y}{2p} = 1$ ($p \neq 0$) is een lijn door $(p, 0)$ en $(0, 2p)$.

11a k_p: $px + 2y = 8$ door $(3, 5) \Rightarrow p \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 8 \Rightarrow 3p = -2 \Rightarrow p = -\frac{2}{3}$.

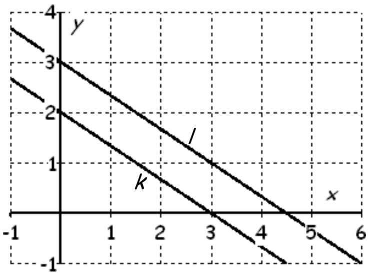
11b k_p: $px + 2y = 8$ door $(3, 0) \Rightarrow p \cdot 3 + 0 = 8 \Rightarrow 3p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{3}$.

11c k_p: $px + 2y = 8$ evenwijdig met $3x + 5y = 10 \Rightarrow k$: $2\frac{1}{2}px + 2\frac{1}{2} \cdot 2y = 2\frac{1}{2} \cdot 8$ met $2\frac{1}{2}p = 3 \Rightarrow 5p = 6 \Rightarrow p = \frac{6}{5}$.

11d k_p: $px + 2y = 8$ evenwijdig met $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ of $5x + 2y = 10 \Rightarrow p = 5$.

12a l_p: $\frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} = 1$ door $(3, 4) \Rightarrow \frac{3}{p} + \frac{4}{p+2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{p} \cdot \frac{p+2}{p+2} + \frac{4}{p+2} \cdot \frac{p}{p} = 1 \Rightarrow \frac{3(p+2)+4p}{p(p+2)} = \frac{1}{1} \Rightarrow p(p+2) = 3(p+2) + 4p \Rightarrow$
$p^2 + 2p = 3p + 6 + 4p \Rightarrow p^2 - 5p - 6 = 0 \Rightarrow (p-6)(p+1) = 0 \Rightarrow p = 6 \vee p = -1$.

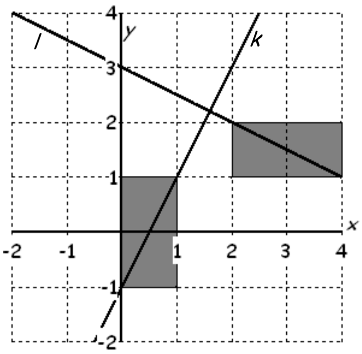
12b l_p: $\frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} = 1 \Rightarrow \frac{y}{p+2} = -\frac{x}{p} + 1 \Rightarrow y = (p+2)(-\frac{x}{p} + 1) \Rightarrow y = -\frac{p+2}{p}x + (p+2)$ met $\text{rc}_l = -\frac{p+2}{p}$ (= 2 gegeven).
Dus $\frac{p+2}{-p} = \frac{2}{1} \Rightarrow p + 2 = -2p \Rightarrow 3p = -2 \Rightarrow p = -\frac{2}{3}$.



13a k: $2x + 3y = 6$ gaat door (0, 2) $(0 + 3 \cdot 2 = 6)$ en (3, 0) $(2 \cdot 3 + 0 = 6)$.
l: $4x + 6y = 18$ gaat door (0, 3) $(0 + 6 \cdot 3 = 18)$ en (3, 1) $(4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 18)$.
Zie de lijnen in de figuur hiernaast.

13b $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \ ❶ \\ 4x + 6y = 18 \ ❷ \end{cases} \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 12 \ ❸ \\ 4x + 6y = 18 \ ❷ \end{cases} -$
$0 = -6$ (heeft geen oplossing).

13c $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.



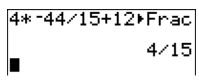
14a k: $y = 2x - 1$ gaat door (0, –1) en (1, 1) $(2 \cdot 1 - 1 = 1)$.
l: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ gaat door (0, 3) en (2, 2) $(-\frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 2)$.
Zie de lijnen in de figuur hiernaast.

14b Richting van k: 1 naar rechts en 2 omhoog.
Richting van l: 2 naar rechts en 1 omlaag.
Dus k en l staan loodrecht op elkaar.

15a k_p: $3x + py = 5$ en l_p: $(p-1)x + (p+4)y = 6$ evenwijdig (al dan niet samenvallend) geeft
$\frac{3}{p-1} = \frac{p}{p+4} \Rightarrow p(p-1) = 3(p+4) \Rightarrow p^2 - p = 3p + 12 \Rightarrow p^2 - 4p - 12 = 0 \Rightarrow (p-6)(p+2) = 0 \Rightarrow p = 6 \vee p = -2$.

15b k_p: $3x + py = 5 \Rightarrow py = -3x + 5 \Rightarrow y = -\frac{3}{p}x + \frac{5}{p} \Rightarrow \text{rc}_{k_p} = -\frac{3}{p}$.
l_p: $(p-1)x + (p+4)y = 6 \Rightarrow (p+4)y = -(p-1)x + 6 \Rightarrow y = -\frac{p-1}{p+4}x + \frac{6}{p+4} \Rightarrow \text{rc}_{l_p} = -\frac{p-1}{p+4}$.
$k_p \perp l_p \Rightarrow -\frac{3}{p} \cdot -\frac{p-1}{p+4} = -1 \Rightarrow \frac{3(p-1)}{p(p+4)} = \frac{-1}{1} \Rightarrow 3(p-1) = -p(p+4) \Rightarrow 3p - 3 = -p^2 - 4p \Rightarrow$
$p^2 + 7p - 3 = 0$ met $D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 61 \Rightarrow p = \frac{-7-\sqrt{61}}{2} \vee p = \frac{-7+\sqrt{61}}{2}$.

16 $\frac{p}{q+3} = \frac{q}{p-1} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{p}{q+3} = \frac{4}{1}$ ❶ $\wedge$ $\frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$ ❷. Uit ❶ volgt dan $p = 4q + 12$ ❸



❸ in ❷ $\Rightarrow \frac{q}{4q+12-1} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{q}{4q+11} = \frac{4}{1} \Rightarrow 16q + 44 = q \Rightarrow 15q = -44 \Rightarrow q = -\frac{44}{15}$ in ❸ $\Rightarrow p = 4 \cdot -\frac{44}{15} + 12 = \frac{4}{15}$.

17a $\left.\begin{array}{l} rc_{AB} = \frac{8-2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow rc_m = -\frac{1}{3} \\ \text{midden van } AB \text{ is} \Rightarrow \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (2, 5) \end{array}\right\} \Rightarrow m\text{: } y - 5 = -\frac{1}{3}(x-2) \text{ of } m\text{: } y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}.$

17b C even ver van A als van B wil zeggen: C op m. Dus C is het snijpunt van l en m.
$y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}$ invullen in $2x - 3y = 6$ geeft: $2x - 3(-\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}) = 6 \Rightarrow 2x + x - 17 = 6 \Rightarrow 3x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{3}$.
$x = \frac{23}{3}$ invullen in $y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}$ geeft: $y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{23}{3} + 5\frac{2}{3} = -\frac{23}{9} + \frac{17}{3} = -\frac{23}{9} + \frac{51}{9} = \frac{28}{9}$. Dus $C(\frac{23}{3}, \frac{28}{9})$.

18 Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van ΔOAB.
$\left.\begin{array}{l} rc_{OA} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow rc_{mll} = -4 \\ \text{midden van } OA \text{ is } (4, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow mll_{OA}\text{: } y - 1 = -4(x-4) \text{ of } mll_{OA}\text{: } y = -4x + 17$ ❶.
$\left.\begin{array}{l} rc_{OB} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow rc_{mll} = -\frac{1}{3} \\ \text{midden van } OB \text{ is } (1, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow mll_{OB}\text{: } y - 3 = -\frac{1}{3}(x-1) \text{ of } mll_{OB}\text{: } y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$ ❷.
❶ in ❷ geeft: $-4x + 17 = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3} \Rightarrow -3\frac{2}{3}x = -13\frac{2}{3}$ (keer 3) $\Rightarrow -11x = -41 \Rightarrow x = \frac{41}{11}$ ❸.
❸ in ❶ geeft: $y = -4 \cdot \frac{41}{11} + 17 = -\frac{164}{11} + \frac{187}{11} = \frac{23}{11}$.
Dus het middelpunt van de omgescgreven cirkel van ΔOAB is $M(\frac{41}{11}, \frac{23}{11})$.

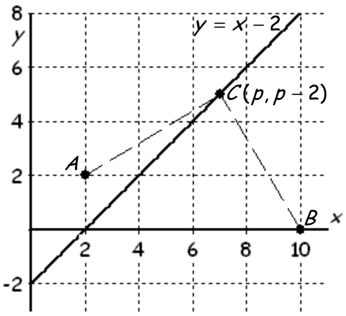
19a B op $y = -3x + 10$. Stel nu $x_B = p$ dan $y_B = -3p + 10$, dus $B(p, -3p + 10)$.

19b $rc_{OB} = \frac{y_B - 0}{x_B - 0} = \frac{-3p+10}{p}$ en $rc_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3p+10-2}{p-6} = \frac{-3p+8}{p-6}$.

19c $\angle OBA = 90° \Rightarrow rc_{OB} \cdot rc_{AB} = -1$
$\frac{-3p+10}{p} \cdot \frac{-3p+8}{p-6} = -1$
$\frac{(-3p+10)(-3p+8)}{p(p-6)} = \frac{-1}{1}$.
$(-3p+10)(-3p+8) = -p(p-6)$
$9p^2 - 24p - 30p + 80 = -p^2 + 6p$
$10p^2 - 60p + 80 = 0$
$p^2 - 6p + 8 = 0$
$(p-2)(p-4) = 0$
$p = 2 \vee p = 4$.

19d $p = 2$ geeft $B(2, 4)$ en $p = 4$ geeft $B(4, -2)$.

20 C ligt op de lijn $y = x - 2 \Rightarrow C(p, p-2)$.
(met $p - 2 > 0$ omdat C boven de x-as ligt)
$rc_{AC} = \frac{p-2-2}{p-2} = \frac{p-4}{p-2}$ en $rc_{BC} = \frac{p-2-0}{p-10} = \frac{p-2}{p-10}$.
$\angle ACB = 90° \Rightarrow rc_{AC} \cdot rc_{BC} = -1$
$\frac{p-4}{p-2} \cdot \frac{p-2}{p-10} = \frac{-1}{1}$ (met $p - 2 \neq 0$)
$-(p-10) = p - 4$
$-p + 10 = p - 4$
$-2p = -14$
$p = 7$.
Dit geeft $C(7, 5)$.



21 $AB = \sqrt{(7-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

22a $d(A,B) = \sqrt{(-3-5)^2 + (4--2)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$.

22b $P(x,y)$ op $m \Rightarrow d(P,A) = d(P,B)$
$\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2}$
$(x+3)^2 + (y-4)^2 = (x-5)^2 + (y+2)^2$
$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4$
$16x - 12y = 4$
Dus m: $4x - 3y = 1$.

23a $P(x,y)$ op mll $m \Rightarrow d(P,A) = d(P,C)$
$\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}$
$(x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2$
$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25$
$4x + 12y = 24$
Dus m: $x + 3y = 6$.

$P(x,y)$ op mll $n \Rightarrow d(P,B) = d(P,C)$
$\sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}$
$(x-7)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2$
$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25$
$-12x + 12y = -24$
Dus n: $x - y = 2$.

23b $\begin{cases} x + 3y = 6 \text{ ❶} \\ x - \;\; y = 2 \text{ ❷} \end{cases}$ $-$
$4y = 4 \Rightarrow y = 1$ in ❷ $\Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$. Dus $S(3, 1)$.

23c S is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

24 $P(x,y)$ op $m \Rightarrow d(P,A) = d(P,B)$
$\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$
$(x+1)^2+(y+3)^2 = (x-7)^2+(y-1)^2$
$x^2+2x+1+y^2+6y+9 = x^2-14x+49+y^2-2y+1$
$16x+8y = 40$. Dus m: $2x+y=5$.

$P(x,y)$ op $n \Rightarrow d(P,A) = d(P,C)$
$\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$
$(x+1)^2+(y+3)^2 = (x+2)^2+(y-4)^2$
$x^2+2x+1+y^2+6y+9 = x^2+4x+4+y^2-8y+16$
Dus n: $-2x+14y=10$.

$\begin{cases} 2x + y = 5 & ❶ \\ -2x + 14y = 10 & ❷ \end{cases}$ +
$15y = 15 \Rightarrow y = 1$ in ❶ $\Rightarrow 2x+1=5 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$. Dus het middelpunt van de omcirkel is $M(2, 1)$.
De straal r van de omcirkel van driehoek ABC is $d(M,A) = \sqrt{(2--1)^2+(1--3)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

25a Alle punten met afstand 5 tot M liggen op de cirkel met middelpunt M en straal 5.
Dus $d(P,M) = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} = 5 \Rightarrow (x-1)^2+(y-4)^2 = 25$.

25b $(x-1)^2+(y-4)^2 = 10^2$.

25c $(x-1)^2+(y-4)^2 = r^2$ door $(0, 0) \Rightarrow (x-1)^2+(y-4)^2 = r^2 \Rightarrow 1+16 = r^2 \Rightarrow r^2 = 17$. Dus $(x-1)^2+(y-4)^2 = 17$.

25d $(x+2)^2+(y-3)^2 = 5$ is een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(-2, 3)$ en straal $r = \sqrt{5}$.

26a $(x+2)^2+(y-1)^2 = r^2$ door $(3, 2) \Rightarrow (3+2)^2+(2-1)^2 = r^2 \Rightarrow 25+1 = r^2 \Rightarrow r^2 = 26$. Dus $(x+2)^2+(y-1)^2 = 26$.

26b $(x-4)^2+(y+2)^2 = r^2$ (maak een schets) door $(4, 0) \Rightarrow r = 2$. Dus $(x-4)^2+(y+2)^2 = 2^2$.

26c $B(x,y)$ op de middelloodl. m van $PQ \Rightarrow d(B,P) = d(B,Q)$
$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}$
$(x-1)^2+(y-2)^2 = (x-7)^2+(y-2)^2$
$x^2-2x+1+y^2-4y+4 = x^2-14x+49+y^2-4y+4$
$12x = 48$. Dus m: $x = 4$ ❶.

$B(x,y)$ op de middelloodl. n van $PR \Rightarrow d(B,P) = d(B,R)$
$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}$
$(x-1)^2+(y-2)^2 = (x-3)^2+(y-6)^2$
$x^2-2x+1+y^2-4y+4 = x^2-6x+9+y^2-12y+36$
$4x+8y = 40$. Dus n: $x+2y = 10$ ❷.

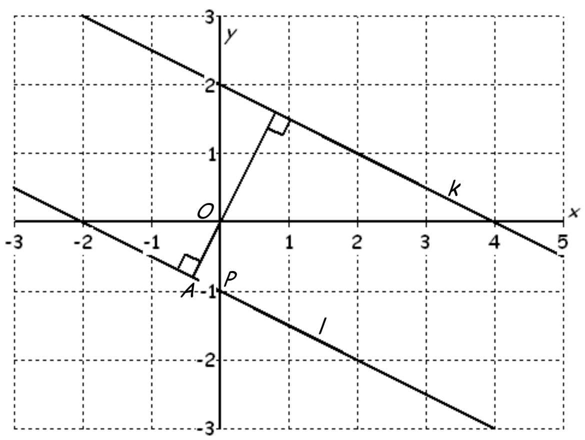
Nu ❶ in ❷ $\Rightarrow 4+2y = 10 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$.
$M = B(4, 3)$ en $r = d(B,P) = \sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. Dit geeft $(x-4)^2+(y-3)^2 = 10$.

27a $A(2, 0)$ en $B(0, 4) \Rightarrow AB = \sqrt{(2-0)^2+(0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

27b $\left.\begin{array}{l} OA \cdot OB = 2 \cdot O(\triangle OAB) \\ AB \cdot OC = 2 \cdot O(\triangle OAB) \end{array}\right\} \Rightarrow OA \cdot OB = AB \cdot OC \Rightarrow 2 \cdot 4 = 2\sqrt{5} \cdot OC \Rightarrow OC = \frac{2 \cdot 4}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

28 $\left.\begin{array}{l} l \,/\!/\, k \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{4} = c \ ❶ \\ P(x_P, y_P) \text{ op } l \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x_P}{2}+\frac{y_P}{4} = c$ ❷. Nu ❷ in ❶ $\Rightarrow l$: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4} = \frac{x_P}{2}+\frac{y_P}{4}$.

29 Neem bijvoorbeeld k: $\frac{x}{4}+\frac{y}{2} = 1$ of k: $x+2y = 4$.
$\left.\begin{array}{l} l \,/\!/\, k \Rightarrow l: x+2y = c \\ P(0, -1) \text{ op } l \end{array}\right\} \Rightarrow 0+2 \cdot -1 = c \Rightarrow -2 = c$.
Dus l: $x+2y = -2$.
$d(P, k) = d(O, k) + d(O, B) = \frac{|4|}{\sqrt{1^2+2^2}} + \frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$.
De formule geeft $d(P, k) = \frac{|0+2 \cdot -1-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-2-4|}{\sqrt{5}} = \frac{|-6|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$.
De gegeven formule klopt dus bij dit voorbeeld.



30 $P(x, y)$ op een bissectrice van k en l geeft $d(P, k) = d(P, l)$.
$\frac{|3x-4y+12|}{\sqrt{25}} = \frac{|4x-3y+6|}{\sqrt{25}} \Rightarrow |3x-4y+12| = |4x-3y+6|$
$3x-4y+12 = 4x-3y+6 \ \vee \ 3x-4y+12 = -(4x-3y+6)$
$-x-y = -6 \ \vee \ 3x-4y+12 = -4x+3y-6$
$x+y = 6 \ \vee \ 7x-7y = -18$.
Dus m: $x+y = 6$ en n: $7x-7y = -18$.

31a $P(0, 3)$ ligt op $k: 3x - 4y = -12$. (want $3 \cdot 0 - 4 \cdot 3 = -12$)
$d(k, l) = d(P, l) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{25}} = \frac{|0 - 12 - 8|}{5} = \frac{|-20|}{5} = \frac{20}{5} = 4$.

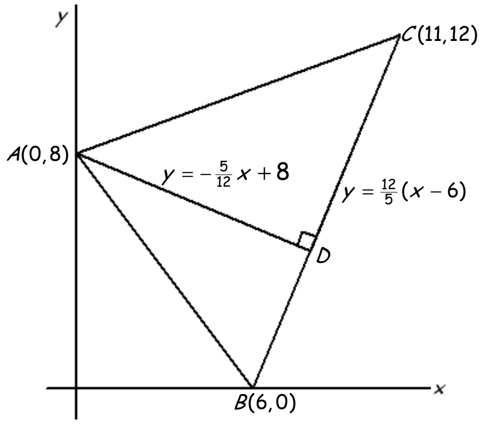
31b $P(x, y)$ op de middenparallel van k en l geeft $d(P, k) = d(P, l)$.
$\frac{|3x - 4y + 12|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x - 4y - 8|}{\sqrt{25}} \Rightarrow |3x - 4y + 12| = |3x - 4y - 8|$
$3x - 4y + 12 = 3x - 4y - 8 \;\vee\; 3x - 4y + 12 = -(3x - 4y - 8)$
$0 = -20 \;\vee\; 3x - 4y + 12 = -3x + 4y + 8$
geen opl. $\vee\; 6x - 8y = -4$
Dus $m: 3x - 4y = -2$.

MAKKELIJKER:
De middenparallel van
$k: 3x - 4y = -12$ en $l: 3x - 4y = 8$
is $m: 3x - 4y = \frac{-12 + 8}{2}$, dus $m: 3x - 4y = -2$.

32a $P(x, y)$ op afstand 2 van k geeft $d(P, k) = 2$.
$\frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{25}} = 2 \Rightarrow \frac{|3x + 4y - 12|}{5} = 2$
$|3x + 4y - 12| = 10$
$3x + 4y - 12 = 10 \;\vee\; 3x + 4y - 12 = -10$
$3x + 4y = 22 \;\vee\; 3x + 4y = 2$
Dus $l: 3x + 4y = 22$ en $m: 3x + 4y = 2$.

32b $P(x, y)$ op afstand 3 van k geeft $d(P, k) = 3$.
$\frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{25}} = 3 \Rightarrow \frac{|3x + 4y - 12|}{5} = 3$
$|3x + 4y - 12| = 15$
$3x + 4y - 12 = 15 \;\vee\; 3x + 4y - 12 = -15$
$3x + 4y = 27 \;\vee\; 3x + 4y = -3$
P op de x-as ($y = 0$) geeft de punten $(9, 0)$ en $(-1, 0)$.

33a AB: $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ of $4x + 3y = 24$.
$d(C, AB) = \frac{|4 \cdot 11 + 3 \cdot 12 - 24|}{\sqrt{25}} = \frac{|44 + 36 - 24|}{5} = \frac{56}{5}$.



33b $\text{rc}_{BC} = \frac{12 - 0}{11 - 6} = \frac{12}{5}$ en $\text{rc}_{BC} \cdot \text{rc}_{AD} = -1 \Rightarrow \text{rc}_{AD} = -\frac{5}{12}$.
Dus AD: $y - 8 = -\frac{5}{12}(x - 0)$ of $y = -\frac{5}{12}x + 8$.
BC: $y - 0 = \frac{12}{5}(x - 6)$ ofwel $y = \frac{12}{5}x - \frac{72}{5}$.
AD en BC snijden geeft $-\frac{5}{12}x + 8 = \frac{12}{5}x - \frac{72}{5}$ $(\times 12 \times 5)$
$-25x + 480 = 144x - 864$
$-169x = -1344$
$x = \frac{1344}{169}$ en $y = -\frac{5}{12} \cdot \frac{1344}{169} + 8 = \frac{792}{169}$.
Dus $D(\frac{1344}{169}, \frac{792}{169})$.

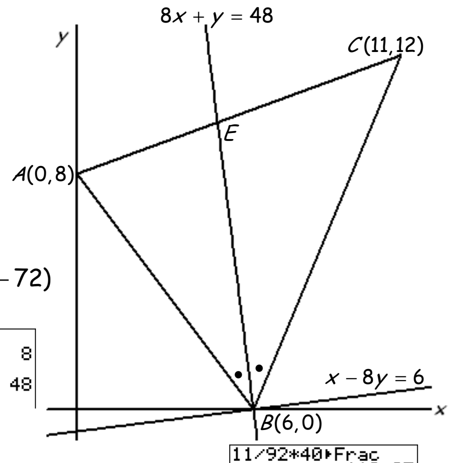
```
-72*12
                -864
1344/169►Frac
            1344/169
-5/12*Ans+8►Frac
             792/169
```

33c $P(x, y)$ op een bissectrice van hoek B geeft $d(P, BA) = d(P, BC)$.
BA: $4x + 3y = 24$ en BC: $y = \frac{12}{5}x - \frac{72}{5}$ ofwel $12x - 5y = 72$.
$d(P, BA) = d(P, BC) \Rightarrow \frac{|4x + 3y - 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|12x - 5y - 72|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}}$
$\frac{|4x + 3y - 24|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x - 5y - 72|}{\sqrt{169}} \Rightarrow \frac{|4x + 3y - 24|}{5} = \frac{|12x - 5y - 72|}{13}$
$13 \cdot |4x + 3y - 24| = 5 \cdot |12x - 5y - 72|$
$13 \cdot (4x + 3y - 24) = 5 \cdot (12x - 5y - 72) \;\vee\; 13 \cdot (4x + 3y - 24) = -5 \cdot (12x - 5y - 72)$
$52x + 39y - 312 = 60x - 25y - 360 \;\vee\; 52x + 39y - 312 = -60x + 25y + 360$
$-8x + 64y = -48 \;\vee\; 112x + 14y = 672$
$x - 8y = 6$ (snijdt lijnstuk AC niet) $\vee\; 8x + y = 48$ (deze zoeken we)

```
112/14
                   8
672/14
                  48
```

AC: $y - 8 = \frac{12 - 8}{11 - 0}(x - 0)$ ofwel AC: $y = \frac{4}{11}x + 8$.
AC snijden met $8x + y = 48$ geeft
$8x + \frac{4}{11}x + 8 = 48 \Rightarrow \frac{92}{11}x = 40 \Rightarrow x = \frac{11}{92} \cdot 40 = \frac{110}{23}$ en $y = \frac{4}{11} \cdot \frac{110}{23} + 8 = \frac{224}{23}$. Dus $E(\frac{110}{23}, \frac{224}{23})$.

```
11/92*40►Frac
              110/23
4/11*Ans+8►Frac
              224/23
```



34a Vanuit A 6 naar rechts en 2 omhoog heeft dezelfde richting als de richting van A naar B.

34b Vanuit A 600 naar rechts en 200 omhoog heeft dezelfde richting als de richting van A naar B. Dus ja.
Vanuit A 450 naar links en 150 omlaag heeft ook dezelfde richting als de richting van A naar B. Dus ja.

35a $\underline{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow k: x + 3y = c$.
Het punt $(2, 5)$ ligt op $k \Rightarrow 2 + 3 \cdot 5 = c \Rightarrow c = 17$. Dus k: $x + 3y = 17$.

35b $\underline{r}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{n}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow l: x + 2y = c$.
Het punt $(0, 3)$ ligt op $l \Rightarrow 0 + 2 \cdot 3 = c \Rightarrow c = 6$. Dus l: $x + 2y = 6$.

36a k: $3x - y = 5 \Rightarrow \underline{n}_k = \binom{3}{-1} \Rightarrow \underline{r}_k = \binom{1}{3}$. Het punt $(0,\ -5)$ ligt op $k \Rightarrow k$: $x = \lambda\ \wedge\ y = -5 + 3\lambda$.

36b l: $2x + 7y = 0 \Rightarrow \underline{n}_l = \binom{2}{7} \Rightarrow \underline{r}_l = \binom{7}{-2}$. Het punt $(0, 0)$ ligt op $l \Rightarrow l$: $x = 7\lambda\ \wedge\ y = -2\lambda$.

37a k: $x = -12 + 3\lambda\ \wedge\ y = 7\frac{1}{2} - 2\lambda \Rightarrow \underline{r}_k = \binom{3}{-2} \Rightarrow \underline{n}_k = \binom{2}{3}$. $\quad l \perp k \Rightarrow \underline{n}_l = \binom{3}{-2}$.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } 3x - 2y = c \\ P(3,\ -7) \text{ op } l \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 \cdot -7 = c \Rightarrow 9 + 14 = 23 = c$. Dus l: $3x - 2y = 23$.

37b m evenwijdig met n: $7x - 5y = 3$ met $\underline{n}_n = \binom{7}{-5} \Rightarrow \underline{r}_m = \underline{r}_n = \binom{5}{7}$.

$P(3,\ -7)$ op $m \Rightarrow m$: $\binom{x}{y} = \binom{3}{-7} + \lambda\binom{5}{7}$.

38 k: $x - y = 2$ snijden met m: $x = 1 + 2\lambda\ \wedge\ y = 2 - \lambda \Rightarrow 1 + 2\lambda - (2 - \lambda) = 2 \Rightarrow -1 + 3\lambda = 2 \Rightarrow 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1$.
$\lambda = 1$ invullen in de parametervoorstelling van m geeft $x = 1 + 2 = 3\ \wedge\ y = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ snijpunt $(3, 1)$.

39 l: $x = -3 + \lambda\ \wedge\ y = 1 - 3\lambda \Rightarrow \underline{r}_l = \binom{1}{-3} \Rightarrow \underline{n}_l = \binom{3}{1}$.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } 3x + y = c \\ (-3, 1) \text{ op } l \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot -3 + 1 = c \Rightarrow -9 + 1 = -8 = c$. Dus l: $3x + y = -8$.

$P(x, y)$ op een bissectrice van k en l geeft $d(P, k) = d(P, l) \Rightarrow \frac{|x + 3y + 7|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|3x + y + 8|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{|x + 3y + 7|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x + y + 8|}{\sqrt{10}}$

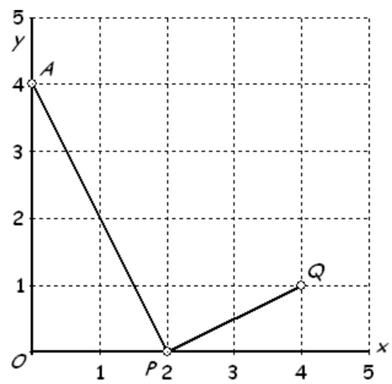
$|x + 3y + 7| = |3x + y + 8|$
$x + 3y + 7 = 3x + y + 8\ \vee\ x + 3y + 7 = -3x - y - 8$
$-2x + 2y = 1\ \vee\ 4x + 4y = -15$.

$\begin{cases} -2x + 2y = 1 \ ❶ \\ 4x + 3y = -1 \ ❷ \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 2 \ ❸ \\ 4x + 3y = -1 \ ❷ \end{cases} +$

$7y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{7}$ in❶ $\Rightarrow -2x + \frac{2}{7} = 1 \Rightarrow -2x = \frac{5}{7} \Rightarrow x = -\frac{5}{14}$.

$\begin{cases} 4x + 4y = -15 \ ❹ \\ 4x + 3y = -1 \ ❷ \end{cases} -$

$y = -14$ in❷ $\Rightarrow 4x - 42 = -1 \Rightarrow 4x = 41 \Rightarrow x = \frac{41}{4}$. De snijpunten zijn $(-\frac{15}{14},\ \frac{1}{7})$ en $(\frac{41}{4},\ -14)$.

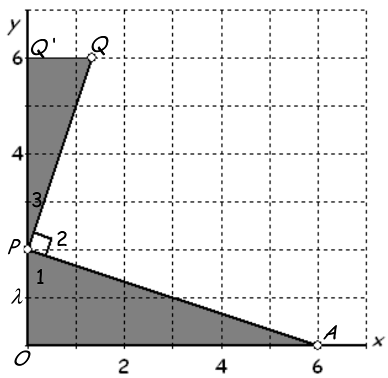


40a Vanuit $A(0, 4)$ naar $P(2, 0)$ ga je 2 naar rechts en 4 omlaag.
$PQ \perp AP$ en $PQ = \frac{1}{2}AP \Rightarrow$ vanuit $P(2, 0)$ ga je 2 naar rechts en 1 omhoog.
Dus $Q(4, 1)$.

40b Vanuit $A(0, 4)$ naar $P(4, 0)$ ga je 4 naar rechts en 4 omlaag.
$PQ \perp AP$ en $PQ = \frac{1}{2}AP \Rightarrow$ vanuit $P(4, 0)$ ga je 2 naar rechts en 2 omhoog.
Dus $Q(6, 2)$.

40c Vanuit $A(0, 4)$ naar $P(8, 0)$ ga je 8 naar rechts en 4 omlaag.
$PQ \perp AP$ en $PQ = \frac{1}{2}AP \Rightarrow$ vanuit $P(8, 0)$ ga je 2 naar rechts en 4 omhoog.
Dus $Q(10, 4)$.

40d De lijn door $(4, 1)$ en $(6, 2)$ heeft als parametervoorstelling $\binom{x}{y} = \binom{4}{1} + \lambda\binom{2}{1}$.
Het punt $(10, 4)$ ligt op $\binom{x}{y} = \binom{4}{1} + \lambda\binom{2}{1}$, want $\binom{10}{4} = \binom{4}{1} + 3 \cdot \binom{2}{1}$.



41 Stel $P(0, \lambda)$.

$\left.\begin{array}{l} \angle O = \angle Q' = 90° \\ \left.\begin{array}{l} \angle A + \angle P_1 = 90° \\ \angle P_3 + \angle P_1 = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle P_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PQ'Q \backsim \Delta AOP$ (hh).

$\Delta PQ'Q \backsim \Delta AOP$ en $PQ = \frac{2}{3}AP \Rightarrow PQ' = \frac{2}{3}OA = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ en $QQ' = \frac{2}{3}OP = \frac{2}{3}\lambda$.

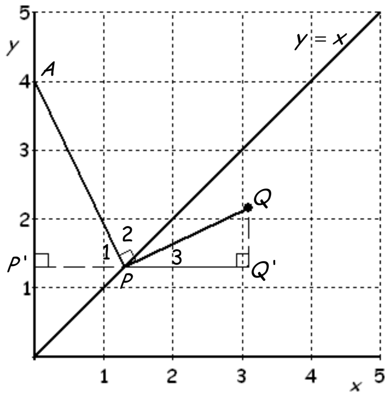
Dus $Q(\frac{2}{3}\lambda,\ 4 + \lambda) \Rightarrow Q$ ligt op de lijn met $\underline{s} = \binom{0}{4}$ en $\underline{r} = \binom{2}{3} \Rightarrow \underline{n} = \binom{3}{-2}$.

Een vergelijking van de lijn is $3x - 2y = -8$ (want $3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 = -8$).

42 Stel $P(6+\lambda, 0)$, dan is $Q(0, 2+2\lambda)$.
Het midden M van PQ is dan $(\frac{6+\lambda+0}{2}, \frac{0+2+2\lambda}{2}) = (3+\frac{1}{2}\lambda, 1+\lambda)$.
M ligt op de lijn met $\underline{s} = \binom{3}{1}$ en $\underline{r} = \binom{1}{2} \Rightarrow \underline{n} = \binom{2}{-1}$. Dus een vergelijking van de lijn is $2x - y = 5$ (want $2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5$).

43 $$\left.\begin{array}{l} \text{Stel } P(\lambda, 0) \Rightarrow OP = \lambda \text{ en } OQ = \frac{1}{2}\lambda. \\ Q(x, \frac{4}{3}x) \Rightarrow OQ = \sqrt{x^2 + (\frac{4}{3}x)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}x^2} = \sqrt{\frac{25}{9}x^2} = \frac{5}{3}x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{3}x = \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow x_Q = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\lambda = \frac{3}{10}\lambda \text{ en}$$
$$y_Q = \frac{4}{3}x_Q = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{10}\lambda = \frac{4}{10}\lambda = \frac{2}{5}\lambda$$
Het midden M van PQ is dan $(\frac{\lambda + \frac{3}{10}\lambda}{2}, \frac{0+\frac{2}{5}\lambda}{2}) = (\frac{13}{20}\lambda, \frac{1}{5}\lambda)$.
M ligt op lijn met $\underline{s} = \binom{0}{0}$ en $\underline{r} = \binom{13}{4} \Rightarrow \underline{n} = \binom{4}{-13}$. Dus een vergelijking van de lijn: $4x - 13y = 0$ (want $4 \cdot 0 - 13 \cdot 0 = 0$).

44 Stel $P(\lambda, \lambda)$.
$$\left.\begin{array}{l} \angle P' = \angle Q' = 90^\circ \\ \left.\begin{array}{l} \angle P_1 + \angle A = 90^\circ \\ \angle P_1 + \angle P_3 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle P_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AP'P \backsim \Delta PQ'Q \text{ (hh).}$$
$\Delta PQ'Q \backsim \Delta AOP$ en $PQ = \frac{2}{3}AP \Rightarrow PQ' = \frac{2}{3}(4-\lambda)$ en $QQ' = \frac{2}{3}\lambda$.
$x_Q = P'Q' = \lambda + \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\lambda = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\lambda$ en $y_Q = OP' + Q'Q = \lambda + \frac{2}{3}\lambda = \frac{5}{3}\lambda$.
Dus Q op een lijn met $\underline{s} = \binom{\frac{8}{3}}{0}$ en $\underline{r} = \binom{1}{5} \Rightarrow \underline{n} = \binom{5}{-1}$.
Een vergelijking van de lijn is $5x - y = 13\frac{1}{3}$ (want $5 \cdot \frac{8}{3} - 0 = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$).



45 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ (haakjes wegwerken)
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 25$ (op nul herleiden)
$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.

46 $x^2 + y^2 + by + 15 = 0$
$x^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2 + 15 = 0$
$x^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{4}b^2 - 15$.
Dit stelt een cirkel voor als ⇗
$\frac{1}{4}b^2 - 15 \geq 0$
$\frac{1}{4}b^2 \geq 15$
$b^2 \geq 4 \cdot 15$
$|b| \geq 2\sqrt{15}$. Dus $b \leq -2\sqrt{15} \vee b \geq 2\sqrt{15}$.

47a $0^2 + 0^2 + a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$ klopt.

47b $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ door $A(10, 0) \Rightarrow 100 + 0 + 10a + 0b = 0 \Rightarrow 10a = -100 \Rightarrow a = -10$.
$x^2 + y^2 + ax + by = 0$ door $B(4, 6) \Rightarrow 16 + 36 + 4a + 6b = 0 \Rightarrow 4a + 6b = -52 \Rightarrow 2a + 3b = -26$.
$$\left.\begin{array}{l} a = -10 \\ 2a + 3b = -26 \end{array}\right\} \Rightarrow -20 + 3b = -26 \Rightarrow 3b = -6 \Rightarrow b = -2.$$
Dus $x^2 + y^2 - 10x - 2y = 0$.
$(x-5)^2 - 25 + (y-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-1)^2 = 26$. Dus een cirkel met $M(5, 1)$ (en $r = \sqrt{26}$).

47c $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ met $a = 2b$ ($a > 0$ en $b > 0$) $\Rightarrow x^2 + y^2 + 2bx + by = 0$.
$(x+b)^2 - b^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2 = 0 \Rightarrow (x+b)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 1\frac{1}{4}b^2$ ($= 5 = r^2$).
$\frac{5}{4}b^2 = 5 \Rightarrow \frac{1}{4}b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = -2$ (< 0 dus voldoet niet) $\vee$ $b = 2$ (voldoet). Dus $M(-b, -\frac{1}{2}b) = M(-2, -1)$.

48a $x^2 + y^2 + ax - 5y + 6 = 0$
$(x + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + 6 = 0$
$(x + \frac{1}{2}a)^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}$.
Dit stelt een cirkel voor als ⇗
$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4} \geq 0$
$a^2 + 1 \geq 0$
$a^2 \geq -1$. Dit geldt voor elke waarde van a.
Dus $x^2 + y^2 + ax - 5y + 6 = 0$ stelt voor elke a een cirkel voor.

48b $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4} \geq 5^2$
$a^2 + 1 \geq 100$
$a^2 \geq 99$
$|a| \geq \sqrt{99}$. Dus $a \leq -\sqrt{99} \vee a \geq \sqrt{99}$.

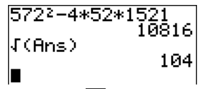
48c $(-\frac{1}{2}a, 2\frac{1}{2})$ op k geeft $-\frac{1}{2}a - 2 \cdot 2\frac{1}{2} + 2 = 0$
$-\frac{1}{2}a - 5 + 2 = 0$
$-\frac{1}{2}a = 3$
$a = -6$.

49a $x^2+y^2+4x-6y-24=0$
$(x+2)^2-4+(y-3)^2-9-24=0$
$(x+2)^2+(y-3)^2=37$. Dus $M(-2,3)$ en $r=\sqrt{37}$.
$AM=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}<\sqrt{37} \Rightarrow A$ ligt binnen de cirkel.

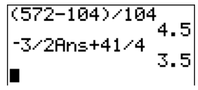
49b $P(\lambda, 6-\lambda)$ op k.
$PM=\sqrt{(\lambda+2)^2+(6-\lambda-3)^2}=\sqrt{(\lambda+2)^2+(3-\lambda)^2}$.
$PM<\sqrt{37} \Rightarrow (\lambda+2)^2+(3-\lambda)^2<37$
$\lambda^2+4\lambda+4+9-6\lambda+\lambda^2<37$
$2\lambda^2-2\lambda-24<0$
$\lambda^2-\lambda-12<0$
$(\lambda-4)(\lambda+3)<0$
$-3<\lambda<4$.

50a $x-2y=2 \Rightarrow x=2y+2$ invullen in $(x-3)^2+(y-2)^2=10$
$(2y+2-3)^2+(y-2)^2=10$
$(2y-1)^2+(y-2)^2=10$
$4y^2-4y+1+y^2-4y+4=10$
$5y^2-8y-5=0$ met $D=(-8)^2-4\cdot5\cdot-5=164$
$y=\frac{8-\sqrt{164}}{10}=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{41} \ \vee \ y=\frac{8+\sqrt{164}}{10}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{41}$
$y=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{41} \Rightarrow x=2\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{41}\right)+2=\frac{18}{5}-\frac{2}{5}\sqrt{41}$ en
$y=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{41} \Rightarrow x=2\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{41}\right)+2=\frac{18}{5}+\frac{2}{5}\sqrt{41}$.

50b $6x+4y=41 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{41}{4}$ invullen geeft
$x^2+(-\frac{3}{2}x+\frac{41}{4})^2-8x-2\cdot(-\frac{3}{2}x+\frac{41}{4})+10\frac{1}{2}=0$
$x^2+\frac{9}{4}x^2-\frac{123}{4}x+\frac{1681}{16}-8x+3x-\frac{41}{2}+10\frac{1}{2}=0$
$\frac{13}{4}x^2-\frac{143}{4}x+\frac{1521}{16}=0$
$52x^2-572x+1521=0$



$D=(-572)^2-4\cdot52\cdot1521=10816 \Rightarrow \sqrt{D}=104$
$x=\frac{572-104}{104}=\frac{9}{2} \ \vee \ x=\frac{572-104}{104}=\frac{13}{2}$
$x=\frac{9}{2} \Rightarrow y=-\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{2}+\frac{41}{4}=\frac{7}{2}$ en
$x=\frac{13}{2} \Rightarrow y=-\frac{3}{2}\cdot\frac{13}{2}+\frac{41}{4}=\frac{1}{2}$.



51a $x^2-4x+y^2=0$
$(x-2)^2-4+y^2=0$
$(x-2)^2+(y-0)^2=4 \Rightarrow M(2,0)$.

51b $0^2-4\cdot0+0^2=0$ klopt. Dus $O(0,0)$ ligt op de cirkel.

51c Substitutie van $y=ax$ in $x^2-4x+y^2=0$ geeft
$x^2-4x+(ax)^2=0$
$x^2-4x+a^2x^2=0$
$(a^2+1)x^2-4x=0$
$x\left((a^2+1)x-4\right)=0$
$x=0 \ \vee \ x=\frac{4}{a^2+1}$
$x=0 \Rightarrow y=a\cdot0=0$ (snijpunt O) en
$x=\frac{4}{a^2+1} \Rightarrow y=a\cdot\frac{4}{a^2+1}=\frac{4a}{a^2+1}$ (snijpunt A).

51d $a=\frac{1}{2}$ geeft $x_A=\frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{4}{\frac{1}{4}+1}=\frac{4}{\frac{5}{4}}=4\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$
en $y_A=\frac{4\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{2}{\frac{1}{4}+1}=\frac{2}{\frac{5}{4}}=2\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5} \Rightarrow A(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$.

51e $a=\frac{3}{4}$ geeft $x_A=\frac{4}{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}=\frac{4}{\frac{9}{16}+1}=\frac{4}{\frac{25}{16}}=4\cdot\frac{16}{25}=\frac{64}{25}$
en $y_A=\frac{4\cdot\frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}=\frac{3}{\frac{9}{16}+1}=\frac{3}{\frac{25}{16}}=3\cdot\frac{16}{25}=\frac{48}{25}$.
De snijpunten zijn $A(\frac{64}{25}, \frac{48}{25})$ en $O(0,0)$.

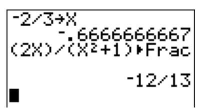
51f $x_P=\frac{50}{13}$ geeft $\frac{4}{a^2+1}=\frac{50}{13}$
$50a^2+50=52$
$50a^2=2$
$a^2=\frac{2}{50}=\frac{1}{25}$
$a=-\frac{1}{5} \ \vee \ a=\frac{1}{5}$
Verder geldt: (omdat P onder de x-as)
$y_P<0 \Rightarrow \frac{4a}{a^2+1}<0 \Rightarrow a<0$ (omdat $a^2+1>0$).
Dus $a=-\frac{1}{5}$ voldoet en $a=\frac{1}{5}$ voldoet niet.
Een vergelijking van de lijn is $y=-\frac{1}{5}x$.

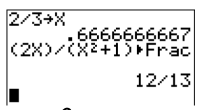
52a $y-0=a(x--1)$ geeft $y=ax+a$.

52b Substitutie van $y=ax+a$ in $x^2+y^2=1$ geeft $x^2+(ax+a)^2=1$
$x^2+a^2x^2+2a^2x+a^2=1$
$(a^2+1)x^2+2a^2x+a^2-1=0$ met $D=(2a^2)^2-4\cdot(a^2+1)\cdot(a^2-1)=4a^4-4\cdot(a^4-1)=4$
$x=\frac{-2a^2-2}{2\cdot(a^2+1)}=\frac{-2\cdot(a^2+1)}{2\cdot(a^2+1)}=-1 \ \vee \ x=\frac{-2a^2+2}{2\cdot(a^2+1)}=\frac{-a^2+1}{a^2+1}=\frac{1-a^2}{a^2+1}$.
$x=-1 \Rightarrow y=0$ en $x=\frac{1-a^2}{a^2+1} \Rightarrow y=a\cdot\frac{1-a^2}{a^2+1}+a=\frac{a-a^3}{a^2+1}+\frac{a^3+a}{a^2+1}=\frac{a-a^3+a^3+a}{a^2+1}=\frac{2a}{a^2+1}$.

52c $a=\frac{1}{2}$ geeft het snijpunt S met $x_S=\frac{1-a^2}{a^2+1}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$ en $y_S=\frac{2a}{a^2+1}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=1\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$.
Er geldt: $(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2=1$ ofwel $3^2+4^2=5^2$. Je krijgt het Pythagoreïsch drietal (3, 4, 5).
$a=\frac{1}{4}$ geeft $x_S=\frac{1-a^2}{a^2+1}=\frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}}=\frac{15}{16}\cdot\frac{16}{17}=\frac{15}{17}$ en $y_S=\frac{2a}{a^2+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{17}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{17}=\frac{8}{17}$.
Er geldt: $(\frac{15}{17})^2+(\frac{8}{17})^2=1$ ofwel $15^2+8^2=17^2$. Je krijgt het Pythagoreïsch drietal (15, 8, 17).

52d $5^2+12^2=13^2$ ofwel $(\frac{5}{13})^2+(\frac{12}{13})^2=1$.
Dus $\frac{1-a^2}{a^2+1}=\frac{5}{13} \ \wedge \ \frac{2a}{a^2+1}=\frac{12}{13}$ (**).





$\frac{1-a^2}{a^2+1}=\frac{5}{13} \Rightarrow 5a^2+5=13-13a^2 \Rightarrow 18a^2=8 \Rightarrow a^2=\frac{4}{9} \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$ (voldoet niet aan **) $\vee$ $a=\frac{2}{3}$ (voldoet).

```
-115/121→X
          -.9504132231
(2X)/(X²+1)▸Frac
          -.9987081031
13915/13933
           .9987081031
```

```
115/121→X
           .9504132231
(2X)/(X²+1)▸Frac
           .9987081031
13915/13933
           .9987081031
```

52e $708^2+13915^2=13933^2$ ofwel $(\frac{708}{13933})^2+(\frac{13915}{13933})^2=1$.

Dus $\frac{1-a^2}{a^2+1}=\frac{708}{13933} \wedge \frac{2a}{a^2+1}=\frac{13915}{13933}$ (**).

$\frac{1-a^2}{a^2+1}=\frac{708}{13933} \Rightarrow 708a^2+708=13933-13933a^2 \Rightarrow 14641a^2=13225 \Rightarrow a^2=\frac{13225}{14641} \Rightarrow a=\pm\frac{115}{121}$.

```
√(13225/14641)▸F
rac
          115/121
```

Dus $a=\frac{115}{121}$ (de andere oplossing voldoet niet aan **).

53a Substitutie van $y=2x+5$ in $x^2+y^2=10$ geeft

$x^2+(2x+5)^2=10$

$x^2+4x^2+20x+25=10$

$5x^2+20x+15=0$

$x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

$x=-3 \vee x=-1$.

$x=-3 \Rightarrow y=2\cdot -3+5=-1$ en

$x=-1 \Rightarrow y=2\cdot -1+5=3$.

53b Substitutie van $y=2x+5\sqrt{2}$ in $x^2+y^2=10$ geeft

$x^2+(2x+5\sqrt{2})^2=10$

$x^2+4x^2+20\sqrt{2}\cdot x+50=10$

$5x^2+20\sqrt{2}\cdot x+40=0$

$x^2+4\sqrt{2}\cdot x+8=0$

$D=(4\sqrt{2})^2-4\cdot 1\cdot 8=32-32=0$.

Omdat $D=0$ is er één oplossing.

De lijn en de cirkel hebben één punt gemeenschappelijk, dus de lijn raakt de cirkel.

54a m: $y-0=-\frac{1}{3}(x-0) \Rightarrow m$: $y=-\frac{1}{3}x$.

Substitutie van $y=-\frac{1}{3}x$ in $x^2+y^2=10$ geeft

$x^2+(-\frac{1}{3}x)^2=10$

$x^2+\frac{1}{9}x^2=10$

$\frac{10}{9}x^2=10$

$x^2=9$

$x=-3 \vee x=3$.

$x=-3 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}\cdot -3=1$ en

$x=3 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}\cdot 3=-1$.

De raakpunten zijn $A(-3,1)$ en $B(3,\ -1)$.

$k_1 \perp m$ door $A(-3,1) \Rightarrow k_1$: $y=3x+10$.

$k_2 \perp m$ door $B(3,\ -1) \Rightarrow k_2$: $y=3x-10$.

54b Stel l: $y-0=a(x-10)$ ofwel $y=ax-10a$.

Substitutie in $x^2+y^2=10$ geeft

$x^2+(ax-10a)^2=10$

$x^2+a^2x^2-20a^2x+100a^2=10$

$(a^2+1)x^2-20a^2x+100a^2-10=0$.

Raken, dus $D=0$.

$D=(-20a^2)^2-4\cdot(a^2+1)\cdot(100a^2-10)$

$=400a^4-4\cdot(100a^4-10a^2+100a^2-10)$

$=400a^4-400a^4+360a^2-40=360a^2-40$.

$D=0 \Rightarrow 360a^2=40 \Rightarrow a^2=\frac{1}{9} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{3}$.

Dus l_1: $y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$ en l_2: $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$.

55 Raaklijn k in (raakpunt) $A(x_A,y_A)$ aan $x^2+y^2=r^2$ met $\underline{r}_{OA}=\binom{x_A}{y_A} \Rightarrow \underline{n}_{OA}=\underline{r}_k=\binom{-y_A}{x_A} \Rightarrow \underline{n}_k=\binom{x_A}{y_A}$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}k\text{: } x_A\cdot x+y_A\cdot y=c\\ \text{door } A(x_A,y_A)\end{array}\right\}\Rightarrow {x_A}^2+{y_A}^2=c\\ A(x_A,y_A)\text{ op } x^2+y^2=r^2\Rightarrow {x_A}^2+{y_A}^2=r^2\end{array}\right\}\Rightarrow c=r^2.$$ De raaklijn is dus $x_A\cdot x+y_A\cdot y=r^2$.

56a k: $2x+3y=13$.

56b Van de cirkel is $M(0,0)$ en $r=\sqrt{13}$.

Stel l: $y=1\frac{1}{2}x+b$, dus l: $1\frac{1}{2}x-y+b=0$.

Raken, dus $d(M,l)=r$.

$\frac{|0+0+b|}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(-1)^2}}=\sqrt{13} \Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{\frac{13}{4}}}=\sqrt{13}$

$|b|=\sqrt{\frac{13}{4}}\cdot\sqrt{13}=\sqrt{\frac{169}{4}}=\frac{13}{2}$

$b=-6\frac{1}{2} \vee b=6\frac{1}{2}$.

Dus l_1: $y=1\frac{1}{2}x-6\frac{1}{2}$ en l_2: $y=1\frac{1}{2}x+6\frac{1}{2}$.

56c Stel m: $y-0=a(x-4\frac{1}{3})$, dus m: $ax-y-4\frac{1}{3}a=0$.

Raken, dus $d(M,m)=r$.

```
-(4+1/3)▸Frac
             -13/3
Ans²▸Frac
              169/9
Ans-13▸Frac
               52/9
```

```
13/Ans▸Frac
                9/4
```

$\frac{|0-0-4\frac{1}{3}a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{13} \Rightarrow \frac{|-4\frac{1}{3}a|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{13}$

$|-\frac{13}{3}a|=\sqrt{13a^2+13}$ (kwadrateren)

$\frac{169}{9}a^2=13a^2+13 \Rightarrow \frac{52}{9}a^2=13 \Rightarrow a^2=\frac{9}{4}$.

$a=-\frac{3}{2} \vee a=\frac{3}{2}$.

Dus m_1: $y=-1\frac{1}{2}(x-4\frac{1}{3})$ en m_2: $y=1\frac{1}{2}(x-4\frac{1}{3})$.

56d Stel n: $y-5=a(x-1)$, dus $ax-y-a+5=0$.

Raken, dus $d(M,n)=r$.

$\frac{|0-0-a+5|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{13} \Rightarrow \frac{|-a+5|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{13}$

$|-a+5|=\sqrt{13a^2+13}$ (kwadrateren)

$a^2-10a+25=13a^2+13$

$-12a^2-10a+12=0 \Rightarrow 6a^2+5a-6=0$

$D=5^2-4\cdot 6\cdot -6=169 \Rightarrow \sqrt{D}=13$

$a=\frac{-5-13}{12}=\frac{-18}{12}=-\frac{3}{2} \vee a=\frac{-5+13}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

Dus n_1: $y-5=-\frac{3}{2}(x-1)$ en n_2: $y-5=\frac{2}{3}(x-1)$.

57a k: $-4x - y = 17$.

57b Van de cirkel is $M(0, 0)$ en $r = \sqrt{17}$.
m loodrecht op l: $4x - y = 3$ dus m: $x + 4y = c$.
Raken, dus $d(M, m) = r$.
$\frac{|0+0-c|}{\sqrt{1^2+4^2}} = \sqrt{17} \Rightarrow \frac{|-c|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$
$|-c| = |c| = 17$
$c = -17 \vee c = 17$.
Dus m_1: $x + 4y = -17$ en m_2: $x + 4y = 17$.

57c Stel n: $y - 17 = a(x - 0)$, dus $ax - y + 17 = 0$.
Raken, dus $d(M, n) = r$.
$\frac{|0-0+17|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = \sqrt{17} \Rightarrow \frac{|17|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{17}$
$|17| = \sqrt{17a^2 + 17}$ (kwadrateren)
$17 \cdot 17 = 17a^2 + 17$
$17 = a^2 + 1 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = -4 \vee a = 4$.
Dus n_1: $-4x - y + 17 = 0$ en n_2: $4x - y + 17 = 0$.

58a Voor k geldt k: $x_A \cdot x + y_A \cdot y = r^2$, dus $-x + 2y = 5$.
Voor l geldt l: $x_B \cdot x + y_B \cdot y = r^2$, dus $2x - y = 5$.

58b $\begin{cases} -x + 2y = 5 \text{ ❶} \\ 2x - y = 5 \text{ ❷} \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 10 \text{ ❸} \\ 2x - y = 5 \text{ ❷} \end{cases}$ +
$3y = 15 \Rightarrow y = 5$ in❶ $\Rightarrow -x + 10 = 5 \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$. Dus $P(5, 5)$.

58c $\underline{r}_{AB} = \binom{3}{-3} \Rightarrow \underline{n}_{AB} = \binom{1}{1}$.
$\left.\begin{array}{l} AB: x + y = c \\ \text{door } A(-1, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 + 2 = c \Rightarrow c = 1$. Dus AB: $x + y = 1$.
Controle: m: $x_P \cdot x + y_P \cdot y = r^2$
m: $5x + 5y = 5$
m: $x + y = 1$. Dus lijn m is lijn AB.

59 Een voorkeur is persoonlijk. Zorg dat je beide methoden beheerst.

60a c_2: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \xrightarrow{\text{translatie } (-x_M, -y_M)} (x - -x_M - x_M)^2 + (y - -y_M - y_M)^2 = r^2$.
dus c_1: $x^2 + y^2 = r^2$.
$P(x_P, y_P) \xrightarrow{\text{translatie } (-x_M, -y_M)} P'(x_P - x_M, y_P - y_M)$.
Poollijn van P' ten opzichte van c_1 is k: $(x_P - x_M) \cdot x + (y_P - y_M) \cdot y = r^2$.

60b k: $(x_P - x_M) \cdot x + (y_P - y_M) \cdot y = r^2 \xrightarrow{\text{translatie } (x_M, y_M)} l$: $(x_P - x_M) \cdot (x - x_M) + (y_P - y_M) \cdot (y - y_M) = r^2$.
(poollijn van P' ten opzichte van c_1) (poollijn van P ten opzichte van c_2)

60c l: $(x_P - x_M) \cdot (x - x_M) + (y_P - y_M) \cdot (y - y_M) = r^2 \Rightarrow \underline{n}_l = \binom{x_P - x_M}{y_P - y_M} = \underline{r}_{PM}$, dus $PM \perp l$.

61a De poollijn van $A(4, 8)$ t.o.v. c: $x^2 + y^2 = 40$ is $4x + 8y = 40$.
$\begin{cases} 4x + 8y = 40 \text{ ❶} \\ x^2 + y^2 = 40 \text{ ❷} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - 2y \text{ ❸} \\ x^2 + y^2 = 40 \text{ ❷} \end{cases}$
Nu ❸ invullen in❷ $\Rightarrow (10 - 2y)^2 + y^2 = 40$
$100 - 40y + 4y^2 + y^2 = 40$
$5y^2 - 40y + 60 = 0$
$y^2 - 8y + 12 = 0$
$(y - 2)(y - 6) = 0 \Rightarrow y = 2 \vee y = 6$.
$y = 2$ in❸ $\Rightarrow x = 10 - 2 \cdot 2 = 6$ met raaklijn in $(6, 2)$ de lijn $6x + 2y = 40$ of $3x + y = 20$.
$y = 6$ in❸ $\Rightarrow x = 10 - 2 \cdot 6 = -2$ met raaklijn in $(-2, 6)$ de lijn $-2x + 6y = 40$ of $-x + 3y = 20$.

61b $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$
$(x - 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 = 0$
$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$
De poollijn van $B(1, 4)$ t.o.v. c: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ is $(1 - 2)(x - 2) + (4 - 1)(y - 1) = 5$.
$-x + 2 + 3y - 3 = 5$
$-x + 3y = 6$
$\begin{cases} x - 3y = -6 \text{ ❶} \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \text{ ❷} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 6 \text{ ❸} \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \text{ ❷} \end{cases}$
Nu ❸ invullen in❷ $\Rightarrow (3y - 6)^2 + y^2 - 4(3y - 6) - 2y = 0$
$9y^2 - 36y + 36 + y^2 - 12y + 24 - 2y = 0$
$10y^2 - 50y + 60 = 0$
$y^2 - 5y + 6 = 0$
$(y - 2)(y - 3) = 0 \Rightarrow y = 2 \vee y = 3$.
$y = 2$ in❸ $\Rightarrow x = 3 \cdot 2 - 6 = 0$ met raaklijn in (poollijn van) $(0, 2)$ de lijn $(0 - 2)(x - 2) + (2 - 1)(y - 1) = 5$
dus $-2x + 4 + y - 1 = 5$ of $-2x + y = 2$.
$y = 3$ in❸ $\Rightarrow x = 3 \cdot 3 - 6 = 3$ met raaklijn in (poollijn van) $(3, 3)$ de lijn $(3 - 2)(x - 2) + (3 - 1)(y - 1) = 5$ dus $x + 2y = 9$.

62a k: $y=-2x+5 \Rightarrow 2x+y=5 \Rightarrow 4x+2y=10$.

62b De poollijn van $P(x_P, y_P)$ t.o.v. c: $x^2+y^2=10$ is $x_P \cdot x + y_P y = 10$.
Als k: $4x+2y=10$ de poollijn is van P t.o.v. c: $x^2+y^2=10$, dan is $P(4, 2)$.

62c Poollijn l: $y=-x-4 \Rightarrow x+y=-4 \Rightarrow -2\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}y=10$. Dus pool $Q(-2\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$.

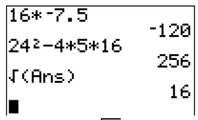
63a De poollijn van $A(2r, 0)$ t.o.v. c: $x^2+y^2=r^2$ is $2rx+0y=r^2$. Dus $2rx=r^2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}r$.
$\begin{cases} x=\frac{1}{2}r \;\text{❶} \\ x^2+y^2=r^2 \;\text{❷} \end{cases}$ Nu ❶ in ❷ $\Rightarrow (\frac{1}{2}r)^2+y^2=r^2 \Rightarrow \frac{1}{4}r^2+y^2=r^2 \Rightarrow y^2=\frac{3}{4}r^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{3}{4}r^2}=\pm\frac{1}{2}r\sqrt{3}$.
De raaklijn in $(\frac{1}{2}r, -\frac{1}{2}r\sqrt{3})$ is de lijn $\frac{1}{2}rx-\frac{1}{2}ry\sqrt{3}=r^2$ ofwel $x-y\sqrt{3}=2r$.
De raaklijn in $(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\sqrt{3})$ is de lijn $\frac{1}{2}rx+\frac{1}{2}ry\sqrt{3}=r^2$ ofwel $x+y\sqrt{3}=2r$.

63b De poollijn van $B(0, 4r)$ t.o.v. c: $x^2+y^2=r^2$ is $0x+4ry=r^2$. Dus $4ry=r^2 \Rightarrow y=\frac{1}{4}r$.
$\begin{cases} y=\frac{1}{4}r \;\text{❶} \\ x^2+y^2=r^2 \;\text{❷} \end{cases}$ Nu ❶ in ❷ $\Rightarrow x^2+(\frac{1}{4}r)^2=r^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{16}r^2=r^2 \Rightarrow x^2=\frac{15}{16}r^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{15}{16}r^2}=\pm\frac{1}{4}r\sqrt{15}$.
De raaklijn in $(-\frac{1}{4}r\sqrt{15}, \frac{1}{4}r)$ is de lijn $-\frac{1}{4}rx\sqrt{15}+\frac{1}{4}ry=r^2$ ofwel $-x\sqrt{15}+y=4r$.
De raaklijn in $(\frac{1}{4}r\sqrt{15}, \frac{1}{4}r)$ is de lijn $\frac{1}{4}rx\sqrt{15}+\frac{1}{4}ry=r^2$ ofwel $x\sqrt{15}+y=4r$.

63c De poollijn van $C(r, 2r)$ t.o.v. c: $x^2+y^2=r^2$ is $rx+2ry=r^2$. Dus $x=r-2y$.
$\begin{cases} x=r-2y \;\text{❶} \\ x^2+y^2=r^2 \;\text{❷} \end{cases}$ Nu ❶ in ❷ $\Rightarrow (r-2y)^2+y^2=r^2 \Rightarrow r^2-4ry+4y^2+y^2=r^2 \Rightarrow 5y^2-4ry=0 \Rightarrow 5y(y-\frac{4}{5}r)=0$.
$y=0$ in ❶ $\Rightarrow x=r-2\cdot 0=r$ en de raaklijn in $(r, 0)$ is de lijn $rx+0y=r^2$ ofwel $x=r$.
$y=\frac{4}{5}r$ in ❶ $\Rightarrow x=r-2\cdot\frac{4}{5}r=-\frac{3}{5}r$ en de raaklijn in $(-\frac{3}{5}r, \frac{4}{5}r)$ is de lijn $-\frac{3}{5}rx+\frac{4}{5}ry=r^2$ ofwel $-3x+4y=5r$.

64a $x^2+y^2-8x-6y+20=0$
$(x-4)^2-16+(y-3)^2-9+20=0$
$(x-4)^2+(y-3)^2=5$
De poollijn van $O(0, 0)$ t.o.v. c: $(x-4)^2+(y-3)^2=5$ is
$(0-4)(x-4)+(0-3)(y-3)=5$
$-4x+16-3y+9=5$
$-4x-3y=-20$
$4x+3y=20$
$\begin{cases} x=5-\frac{3}{4}y \;\text{❶} \\ (x-4)^2+(y-3)^2=5 \;\text{❷} \end{cases}$

Nu ❶ in ❷ $\Rightarrow (1-\frac{3}{4}y)^2+(y-3)^2=5$
$1-\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}y^2+y^2-6y+9=5$
$\frac{25}{16}y^2-7\frac{1}{2}y+5=0$
$25y^2-120y+80=0$
$5y^2-24y+16=0$



$D=(-24)^2-4\cdot 5\cdot 16=256 \Rightarrow \sqrt{D}=16$
$y=\frac{24+16}{10}=4$ in ❶ $\Rightarrow x=5-\frac{3}{4}\cdot 4=5-3=2$
$y=\frac{24-16}{10}=\frac{4}{5}$ in ❶ $\Rightarrow x=5-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=5-\frac{3}{5}=4\frac{2}{5}$.

Raaklijn in $(2, 4)$ (door pool O) is $(2-4)(x-4)+(4-3)(y-3)=5 \Rightarrow -2x+8+y-3=5 \Rightarrow -2x+y=0$.
Raaklijn in $(4\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ (door pool O) is $(4\frac{2}{5}-4)(x-4)+(\frac{4}{5}-3)(y-3)=5 \Rightarrow \frac{2}{5}x-\frac{8}{5}-2\frac{1}{5}y+6\frac{3}{5}=5 \Rightarrow 2x-11y=0$.

64b De poollijn van $A(3, 0)$ t.o.v. c: $(x-4)^2+(y-3)^2=5$ is
$(3-4)(x-4)+(0-3)(y-3)=5$
$-x+4-3y+9=5$
$-x-3y=-8$
$x+3y=8$
$\begin{cases} x=8-3y \;\text{❶} \\ (x-4)^2+(y-3)^2=5 \;\text{❷} \end{cases}$

Nu ❶ in ❷ $\Rightarrow (4-3y)^2+(y-3)^2=5$
$16-24y+9y^2+y^2-6y+9=5$
$10y^2-30y+20=0$
$y^2-3y+2=0$
$(y-2)(y-1)=0$
$y=2$ in ❶ $\Rightarrow x=8-3\cdot 2=2$
$y=1$ in ❶ $\Rightarrow x=8-3\cdot 1=5$.

Raaklijn in $(2, 2)$ is $(2-4)(x-4)+(2-3)(y-3)=5 \Rightarrow -2x+8-y+3=5 \Rightarrow -2x-y=-6 \Rightarrow 2x+y=6$.
Raaklijn in $(5, 1)$ is $(5-4)(x-4)+(1-3)(y-3)=5 \Rightarrow x-4-2y+6=5 \Rightarrow x-2y=3$.

65a $x^2+y^2-10x-4y+4=0$
$(x-5)^2-25+(y-2)^2-4+4=0$
$(x-5)^2+(y-2)^2=25$

De poollijn van $A(-6, 4)$ t.o.v. c: $(x-5)^2+(y-2)^2=25$ is
$(-6-5)(x-5)+(4-2)(y-2)=25$
$-11x+55+2y-4=25$
$-11x+2y=-26$ ofwel poollijn p: $11x-2y=26$.

65b De raaklijn k in (poollijn van) $B(8, 6)$ is $(8-5)(x-5)+(6-2)(y-2)=25 \Rightarrow 3x-15+4y-8=25 \Rightarrow k$: $3x+4y=48$.

k: $3x+4y=48$ snijdt de y-as $(x=0)$ in $C(0,12)$.
De poollijn van $C(0,12)$ is $(0-5)(x-5)+(12-2)(y-2)=25 \Rightarrow -5x\cancel{+25}+10y-20=\cancel{25} \Rightarrow p\!: -x+2y-4=0$.

$\begin{cases} x=2y-4 \text{ ❶} \\ (x-5)^2+(y-2)^2=25 \text{ ❷} \end{cases}$ Nu ❶ in ❷ $\Rightarrow (2y-9)^2+(y-2)^2=25 \Rightarrow$

$4y^2-36y+81+y^2-4y+4=25 \Rightarrow 5y^2-40y+60=0 \Rightarrow y^2-8y+12=0 \Rightarrow (y-6)(y-2)=0$
$y=6$ in ❶ geeft $x=2\cdot 6-4=8$ wat hoort bij $B(8,6)$ en $y=2$ in ❶ geeft $x=2\cdot 2-4=0$. Dus $D(2,0)$.

66a $x^2+y^2-6x-2y+5=0$
$(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+5=0$
$(x-3)^2+(y-1)^2=5$.
Dus $M(3,1)$ (en $r=\sqrt{5}$).

66b $PM=\sqrt{(9-3)^2+(4-1)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\cdot\sqrt{5}$.

66c $PM^2-r^2=(\sqrt{45})^2-5=45-5=40$.
$9^2+4^2-6\cdot 9-2\cdot 4+5=40$.
De uitkomsten zijn gelijk.

66d $x^2+y^2+ax+by+c=0$
$(x+\frac{1}{2}a)^2-\frac{1}{4}a^2+(y+\frac{1}{2}b)^2-\frac{1}{4}b^2+c=0$
$(x+\frac{1}{2}a)^2+(y+\frac{1}{2}b)^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2-c$.
Dus $M(-\frac{1}{2}a,\ -\frac{1}{2}b)$ (en $r=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2-c}$).
$PM^2-r^2=\left(\sqrt{(x_P--\frac{1}{2}a)^2+(y_P--\frac{1}{2}b)^2}\right)^2-(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2-c)$
$=(x_P+\frac{1}{2}a)^2+(y_P+\frac{1}{2}b)^2-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2+c$
$=x_P{}^2+ax_P\cancel{+\frac{1}{4}a^2}+y_P{}^2+by_P\cancel{+\frac{1}{4}b^2}\cancel{-\frac{1}{4}a^2}\cancel{-\frac{1}{4}b^2}+c$
$=x_P{}^2+y_P{}^2+ax_P+by_P+c$.

67a Voor r van c_1 geldt: $r^2=(-1)^2+2^2-8\cdot -1-4\cdot 2+10=1+4+8-8+10=15$. Dus c_1: $(x+1)^2+(y-2)^2=15$.

67b Voor r van c_3 geldt: $r^2=(6-1)^2+(5-4)^2-9=25+1-9=17$. Dus c_3: $(x-6)^2+(y-5)^2=17$.

68 c_1: $x^2+y^2-8x-2y+12=0$
c_1: $(x-4)^2-16+(y-1)^2-1+12=0$
c_1: $(x-4)^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow M_1(4,1)$ en $r_1=\sqrt{5}$.
Voor r van de cirkel c met middelpunt $M_1(4,1)$ die c_2 loodrecht snijdt, geldt:
$r^2=4^2+1^2-8\cdot 4-2\cdot 1+12=16+1-32-2+12=5 \Rightarrow r=\sqrt{5}$.
Dus cirkel c is cirkel $c_1 \Rightarrow$ cirkel c_1 en cirkel c_2 snijden elkaar loodrecht.

69a P op de x-as $(y=0) \Rightarrow$ stel $P(\lambda,0)$. $P(\lambda,0)$ heeft gelijke machten ten opzichte van c_1 en c_2:
$(\lambda+1)^2+(0-5)^2-10=(\lambda-7)^2+(0-2)^2-5$
$\lambda^2+2\lambda+1+25-10=\lambda^2-14\lambda+49+4-5$
$16\lambda=32 \Rightarrow \lambda=2$. Dus $P(2,0)$.

69b P op $x+y=6 \Rightarrow$ stel $P(\lambda,6-\lambda)$. $P(\lambda,6-\lambda)$ heeft gelijke machten ten opzichte van c_3 en c_4:
$\lambda^2+(6-\lambda)^2-8=\lambda^2+(6-\lambda)^2-12\lambda+34$
$\lambda^2+36-12\lambda+\lambda^2-8=\lambda^2+36-12\lambda+\lambda^2-12\lambda+34$
$12\lambda=42 \Rightarrow \lambda=3\frac{1}{2}$. Dus $P(3\frac{1}{2},2\frac{1}{2})$.

70a c_2: $x^2+y^2+4x+8y+10=0$
c_2: $(x+2)^2-...+(y+4)^2-...+10=0$
c_2: $(x+2)^2+(y+4)^2=... \Rightarrow M_2(-2,-4)$.
Voor r_3 van de cirkel c_3 met middelpunt $M_2(-2,-4)$ die c_1 loodrecht snijdt, geldt:
$r_3{}^2=(-2)^2+(-4)^2-6\cdot -2-2\cdot -4+5=4+16+12+8+5=45$. Dus c_3: $(x+2)^2+(y+4)^2=45$.

70b c_1: $x^2+y^2-6x-2y+5=0$
c_1: $(x-3)^2-...+(y-1)^2-...+5=0$
c_1: $(x-3)^2+(y-1)^2=... \Rightarrow M_1(3,1)$.
De lijn door $M_1(3,1)$ en $M_2(-2,-4)$ heeft als vergelijking: $y-1=\frac{-4-1}{-2-3}(x-3)$ ofwel $y=(x-3)+1$ ofwel $y=x-2$.
P op $y=x-2 \Rightarrow$ stel $P(\lambda,\lambda-2)$. $P(\lambda,\lambda-2)$ heeft gelijke machten ten opzichte van c_1 en c_2:
$\cancel{\lambda^2+(\lambda-2)^2}-6\lambda-2(\lambda-2)+5=\cancel{\lambda^2+(\lambda-2)^2}+4\lambda+8(\lambda-2)+10$
$-6\lambda-2\lambda+4+5=4\lambda+8\lambda-16+10$
$-20\lambda=-15 \Rightarrow \lambda=\frac{-15}{-20}=\frac{3}{4}$. Dus $P(\frac{3}{4},\ -1\frac{1}{4})$.

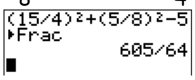
70c $P(x,y)$ heeft macht 20 t.o.v. $c_1 \Rightarrow x^2+y^2-6x-2y+5=20$.

71 Stel c_1: $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r_1^2$ en c_2: $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r_2^2$ met $r_1^2 \neq r_2^2$.
$P(x_P, y_P)$ heeft gelijke machten ten opzichte van c_1 en c_2:
$\cancel{(x_P-x_M)^2+(y_P-y_M)^2}-r_1^2=\cancel{(x_P-x_M)^2+(y_P-y_M)^2}-r_2^2$
$-r_1^2=-r_2^2 \Rightarrow r_1^2=r_2^2$ in tegenspraak met de veronderstelling.

72a $P(x_P, y_P)$ heeft gelijke machten ten opzichte van c_1 en c_2:
$\cancel{x_P^2+y_P^2}-4=\cancel{x_P^2+y_P^2}-8x_P-8y_P+30$
$8x_P+8y_P=34 \Rightarrow 4x_P+4y_P=17$.

72b Uit $4x_P+4y_P=17$ volgt dat P op de lijn $4x+4y=17$ ofwel $y=-x+\frac{17}{4}$ ligt.

72c $P(x_P, y_P)$ heeft gelijke machten ten opzichte van c_1 en c_2:
$\cancel{x_P^2+y_P^2}+ax_P+by_P+c=\cancel{x_P^2+y_P^2}+px_P+qy_P+r$
$ax_P+by_P+c=px_P+qy_P+r$
$ax_P-px_P+by_P-qy_P+c-r=0$
$(a-p)x_P+(b-q)y_P+c-r=0$. Dus P op de lijn $(a-p)x+(b-q)y+c-r=0$.

73 De machtlijn k van c_1 en c_2 is k: $-2x+4y=-5$ en de raaklijn in $A(1, 2)$ aan c_1 is l: $x+2y=5$.
$$\begin{cases}-2x+4y=-5 \text{ ❶} & |1| \\ x+2y=5 \text{ ❷} & |2|\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x+4y=-5 \text{ ❶} \\ 2x+4y=10 \text{ ❸}\end{cases} +$$
$8y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{8}$ in❷ $\Rightarrow x+\frac{5}{4}=5 \Rightarrow x=\frac{15}{4}$.
Dus $M(\frac{15}{4}, \frac{5}{8})$ en $r^2=(\frac{15}{4})^2+(\frac{5}{8})^2-5=\frac{605}{64}$.


Dit geeft c_3: $(x-\frac{15}{4})^2+(y-\frac{5}{8})^2=\frac{605}{64}$.

74 De machtlijn k van c_1 en c_2 is k: $8x+6y=20$ ofwel $x=-\frac{3}{4}y+2\frac{1}{2}$ ❶.
$x=-\frac{3}{4}y+\frac{5}{2}$ invullen in c_1: $x^2+y^2=5$ geeft
$(-\frac{3}{4}y+\frac{5}{2})^2+y^2=5$
$\frac{9}{16}y^2-\frac{15}{4}y+\frac{25}{4}+y^2=5$
$\frac{25}{16}y^2-\frac{15}{4}y+\frac{5}{4}=0$
$25y^2-60y+20=0$
$5y^2-12y+4=0$ met $D=(-12)^2-4\cdot 5\cdot 4=144-80=64 \Rightarrow \sqrt{D}=8$
$y=\frac{12+8}{10}=2$ in ❶ $\Rightarrow x=-\frac{3}{4}\cdot 2+2\frac{1}{2}=-1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}=1$. Dit geeft het snijpunt $(1, 2)$.
$y=\frac{12-8}{10}=\frac{2}{5}$ in ❶ $\Rightarrow x=-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}+2\frac{1}{2}=-\frac{3}{10}+2\frac{1}{2}=2\frac{2}{10}=2\frac{1}{5}$. Dit geeft het snijpunt $(2\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

75 De machtlijn k van c_1 en c_2 is k: $(a-p)x+(b-q)y+c-r=0$ ofwel $y=-\frac{a-p}{b-q}x-\frac{c-r}{b-q}$ met $\text{rc}_k=-\frac{a-p}{b-q}$.

c_1: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ en c_2: $x^2+y^2+px+qy+r=0$
c_1: $(x+\frac{1}{2}a)^2-\frac{1}{4}a^2+(y+\frac{1}{2}b)^2-\frac{1}{4}b^2+c=0$
c_1: $(x+\frac{1}{2}a)^2+(y+\frac{1}{2}b)^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2-c$.
Dus $M_1(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$ (en $r_1=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2-c}$).

c_2: $(x+\frac{1}{2}p)^2-\frac{1}{4}p^2+(y+\frac{1}{2}q)^2-\frac{1}{4}q^2+c=0$
c_2: $(x+\frac{1}{2}p)^2+(y+\frac{1}{2}q)^2=\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{4}q^2-r$.
Dus $M_2(-\frac{1}{2}p, -\frac{1}{2}q)$ (en $r_2=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{4}q^2-r}$).

De lijn door M_1 en M_2 heeft richtingscoëfficiënt $\text{rc}_{M_1M_2}=\frac{-\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}b}{-\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}a}=\frac{-q+b}{-p+a}=\frac{b-q}{a-p}$.
Nu is $\text{rc}_k\cdot\text{rc}_{M_1M_2}=-\frac{a-p}{b-q}\cdot\frac{b-q}{a-p}=-1$. Hieruit volgt dat $k \perp M_1M_2$.

76 De machtlijn k van c_1 en c_2 is k: $12x+6y=30$ ofwel $y=-2x+5$.
Stel $P(\lambda, -2\lambda+5)$ heeft macht 6 t.o.v. c_1 (en c_2):
$\lambda^2+(-2\lambda+5)^2-4=6$
$\lambda^2+4\lambda^2-20\lambda+25-4=6$
$5\lambda^2-20\lambda+15=0$
$\lambda^2-4\lambda+3=0$
$(\lambda-1)(\lambda-3)=0$
$\lambda=1 \vee \lambda=3$. Dus $A(1, 3)$ en $B(3, -1)$.

77a c_1: $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ c_2: $(x-8)^2+(y+2)^2=8$
c_1: $x^2-4x+4+y^2-2y+1=5$ c_2: $x^2-16x+64+y^2+4y+4=8$
c_1: $x^2+y^2-4x-2y=0$ c_2: $x^2+y^2-16x+4y+60=0$
De machtlijn k van c_1 en c_2 is k: $12x-6y-60=0$ ofwel $y=2x-10$.

77b Stel $P(\lambda, 2\lambda-10)$ heeft macht 8 t.o.v. c_1 (en c_2):
$(\lambda-2)^2+(2\lambda-11)^2-5=8$
$\lambda^2-4\lambda+4+4\lambda^2-44\lambda+121-5-8=0$
$5\lambda^2-48\lambda+112=0$ met $D=(-48)^2-4\cdot 5\cdot 112=64 \Rightarrow \sqrt{D}=8$
$x=\lambda=\frac{48+8}{10}=5{,}6 \Rightarrow y=2\cdot 5{,}6-10=1{,}2$. Dit geeft het snijpunt $A(5{,}6;\ 1{,}2)$.
$x=\lambda=\frac{48-8}{10}=4$ in ❶ $\Rightarrow y=2\cdot 4-10=-2$. Dit geeft het snijpunt $B(4,\ -2)$.

77c $P(\lambda, 2\lambda-10)$ heeft gelijke machten (dus P moet op de machtlijn liggen) t.o.v. c_1 (en c_2):
De macht van P t.o.v. c_1 is $(\lambda-2)^2+(2\lambda-11)^2-5=\lambda^2-4\lambda+4+4\lambda^2-44\lambda+121-5=5\lambda^2-48\lambda+120$
$y=5\lambda^2-48\lambda+120$ is minimaal als $\frac{dy}{d\lambda}=0 \Rightarrow 10\lambda-48=0 \Rightarrow 10\lambda=48 \Rightarrow \lambda=4{,}8$. Dus $P(4{,}8;\ -0{,}4)$.

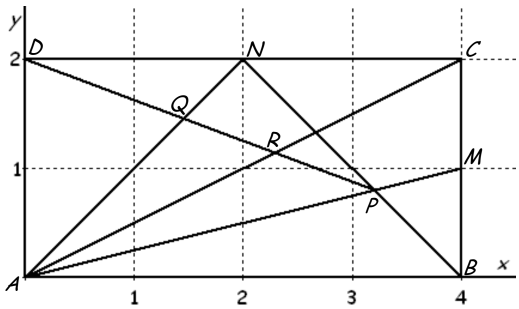
78a $\left.\begin{array}{l} AB=BC=4 \\ \angle ABM=\angle C=90^\circ \\ BM=CN=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABM \cong \Delta BCN$ (ZHZ).
$\left.\begin{array}{l} \Delta ABM \cong \Delta BCN \Rightarrow \angle AMB=\angle BNC \\ \angle SBM=\angle NBC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BSM \sim \Delta BCN$ (hh).

78b $AM^2=AB^2+BM^2=4^2+2^2=16+4=20 \Rightarrow AM=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\cdot\sqrt{5}$.
$\Delta BSM \sim \Delta BCN$ (zie 78a) $\Rightarrow \frac{SM}{CN}=\frac{BM}{BN} \Rightarrow \frac{SM}{2}=\frac{2}{2\sqrt{5}} \Rightarrow 2\sqrt{5}\cdot SM=2\cdot 2 \Rightarrow SM=\frac{2\cdot 2}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

78c $AS=AM-SM=2\sqrt{5}-\frac{2}{5}\sqrt{5}=\frac{8}{5}\sqrt{5}$. Dus $AS:SM=\frac{8}{5}\sqrt{5}:\frac{2}{5}\sqrt{5}=(4\cdot\frac{2}{5}\sqrt{5}):\frac{2}{5}\sqrt{5}=4:1$.

79 Bij een vergroting met factor k ($k>0$) worden alle lengtes met k vermenigvuldigd, dus blijft $DS=AD$.

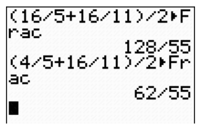
80 Zie de figuur hiernaast.



P is het snijpunt van AM en BN.
AM: $y=\frac{1}{4}x$ en BN: $y=4-x$
Los op $\frac{1}{4}x=4-x \Rightarrow \frac{5}{4}x=4 \Rightarrow 5x=16 \Rightarrow x=\frac{16}{5} \Rightarrow P(\frac{16}{5},\ \frac{4}{5})$.

Q is het snijpunt van AN en DP.
AN: $y=x$ en
DP: $y=2+\frac{\frac{4}{5}-2}{\frac{16}{5}-0}x=2+\frac{4-10}{16}x$.
Los op $x=2-\frac{6}{16}x$
$\frac{22}{16}x=2$
$22x=32$
$x=\frac{32}{22}=\frac{16}{11} \Rightarrow Q(\frac{16}{11},\ \frac{16}{11})$.

R is het snijpunt van AC en DP.
AC: $y=\frac{1}{2}x$ en DP: $y=2-\frac{6}{16}x$.
Los op $\frac{1}{2}x=2-\frac{6}{16}x$
$\frac{14}{16}x=2$
$14x=32$
$x=\frac{32}{14}=\frac{16}{7}$.
Dus $R(\frac{16}{7},\ \frac{8}{7})$.



Midden tussen $P(\frac{16}{5},\ \frac{4}{5})$ en $Q(\frac{16}{11},\ \frac{16}{11})$ ligt
$(\frac{\frac{16}{5}+\frac{16}{11}}{2},\ \frac{\frac{4}{5}+\frac{16}{11}}{2})=(\frac{128}{55},\ \frac{62}{55})\neq R(\frac{16}{7},\ \frac{8}{7})$.
Dus R is niet het midden van PQ.

81a H ligt op $OC \Rightarrow x_H=0$.
H ligt op de hoogtelijn h door B.
Omdat $h\perp AC$ is $\text{rc}_h\cdot\text{rc}_{AC}=-1$
met $\text{rc}_{AC}=\frac{c}{-a} \Rightarrow \text{rc}_h\cdot -\frac{c}{a}=-1 \Rightarrow \text{rc}_h=\frac{a}{c}$.
$\left.\begin{array}{l} h\text{: } y=\frac{a}{c}x+p \\ \text{door } B(b,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0=\frac{a}{c}\cdot b+p \Rightarrow p=-\frac{ab}{c}$.
$x_H=0 \Rightarrow y_H=-\frac{ab}{c}$. Dus $H(0,\ -\frac{ab}{c})$.

81b Voor de middelloodlijn m_1 van AB geldt m_1: $x=\frac{a+b}{2}$.
Voor de middelloodlijn m_2 van AC geldt $\text{rc}_{m_2}=\frac{a}{c}$.
m_2 gaat door het midden $(\frac{a}{2},\ \frac{c}{2})$ van AC.
$\left.\begin{array}{l} m_2\text{: } y=\frac{a}{c}x+q \\ \text{door } (\frac{a}{2},\ \frac{c}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{c}{2}=\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{2}+q \Rightarrow q=\frac{c}{2}-\frac{a^2}{2c}=\frac{c^2-a^2}{2c}$.
$x_M=\frac{a+b}{2} \Rightarrow y_M=\frac{a}{c}\cdot\frac{a+b}{2}+\frac{c^2-a^2}{2c}$. Dus $M(\frac{a+b}{2},\ \frac{ab+c^2}{2c})$.

81c De zwaartelijn z_1 gaat door $C(0, c)$ geldt $(\frac{a+b}{2}, 0)$ van $AB \Rightarrow z_1$: $y-c=\frac{0-c}{\frac{a+b}{2}-0}(x-0) \Rightarrow y=-\frac{2c}{a+b}x+c$ ❶.
De zwaartelijn z_2 gaat door $B(b, 0)$ geldt $(\frac{a}{2},\ \frac{c}{2})$ van $AC \Rightarrow z_2$: $y-0=\frac{\frac{c}{2}-0}{\frac{a}{2}-b}(x-b) \Rightarrow y=\frac{c}{a-2b}(x-b)$.
Los op $\frac{c}{a-2b}x-\frac{bc}{a-2b}=-\frac{2c}{a+b}x+c \Rightarrow \left(\frac{c}{a-2b}+\frac{2c}{a+b}\right)x=c+\frac{bc}{a-2b} \Rightarrow \frac{c(a+b)+2c(a-2b)}{(a-2b)(a+b)}x=\frac{ac-2bc+bc}{a-2b} \Rightarrow$

$\frac{ac+bc+2ac-4bc}{(a-2b)(a+b)}x = \frac{ac-bc}{a-2b}$

$\frac{3ac-3bc}{(a-2b)(a+b)}x = \frac{ac-bc}{a-2b}$

$\frac{3(ac-bc)}{(a-2b)(a+b)}x = \frac{ac-bc}{a-2b}$

$x = \frac{\cancel{ac-bc}}{\cancel{a-2b}} \cdot \frac{\cancel{(a-2b)}(a+b)}{3\cancel{(ac-bc)}} = \frac{a+b}{3}.$

$x = \frac{a+b}{3}$ in ❶ $\Rightarrow y = -\frac{2c}{\cancel{a+b}} \cdot \frac{\cancel{a+b}}{3} + c = -\frac{2}{3}c + c = \frac{1}{3}c = \frac{c}{3}$. Dus $Z(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3})$.

Algemeen geldt: het zwaartepunt van ΔABC is $Z(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$.

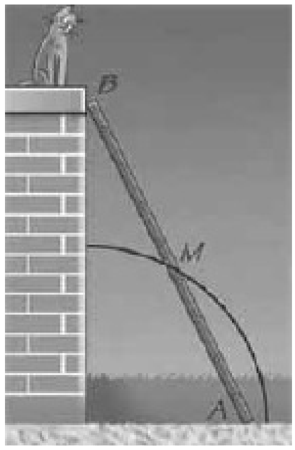
81d We weten: $M(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c})$, $H(0, -\frac{ab}{c})$ en $Z(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3})$.

HZ: $y - -\frac{ab}{c} = \frac{\frac{c}{3} - -\frac{ab}{c}}{\frac{a+b}{3} - 0}(x-0) \Rightarrow y + \frac{ab}{c} = \frac{c^2+3ab}{c(a+b)}x \Rightarrow y = \frac{c^2+3ab}{c(a+b)}x - \frac{ab}{c}$.

Nu nog controleren of $M(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c})$ hierop ligt.

$\frac{ab+c^2}{2c} \overset{?}{=} \frac{c^2+3ab}{c\cancel{(a+b)}} \cdot \frac{\cancel{a+b}}{2} - \frac{ab}{c} \Rightarrow \frac{ab+c^2}{2c} \overset{?}{=} \frac{c^2+3ab}{2c} - \frac{2ab}{2c} \Rightarrow \frac{ab+c^2}{2c} \overset{?}{=} \frac{c^2+ab}{2c}$ klopt.

82



Zie **Theorie B** op blz. 44.

83a Assenstel met $A(-\frac{1}{2}d, 0)$ en $B(\frac{1}{2}d, 0)$. (gebruik de figuur uit het voorbeeld op blz. 45 in het boek)

P op de cirkel $(x+\frac{1}{2}d)^2 + y^2 = r^2$ en op de cirkel $(x-\frac{1}{2}d)^2 + y^2 = (kr)^2$.

$$\begin{cases} x^2 + dx + \frac{1}{4}d^2 + y^2 = r^2 \text{ ❶} \\ x^2 - dx + \frac{1}{4}d^2 + y^2 = k^2r^2 \end{cases} -$$

$2dx = r^2 - k^2r^2 = (1-k^2)r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{2dx}{1-k^2}$ in ❶ $\Rightarrow$

De cirkel $x^2 + dx + \frac{1}{4}d^2 + y^2 = \frac{2dx}{1-k^2}$ ofwel $x^2 + \left(d - \frac{2d}{1-k^2}\right)x + y^2 + \frac{1}{4}d^2 = 0$.

83b Assenstel met $A(-\frac{1}{2}d, 0)$ en $B(\frac{1}{2}d, 0)$.

P op de cirkel $(x+\frac{1}{2}d)^2 + y^2 = r^2$ en op de cirkel $(x-\frac{1}{2}d)^2 + y^2 = r^2$.

$$\begin{cases} x^2 + dx + \frac{1}{4}d^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 - dx + \frac{1}{4}d^2 + y^2 = r^2 \end{cases} -$$

$2dx = 0$ $(d \neq 0) \Rightarrow x = 0$ (de y-as en geen cirkel). Dus de punten P liggen op de middelloodlijn van AB.

84a C ligt op m: $x = 1$ en op $y = ax$. Dus $C(1, a)$.

D ligt op c: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ en op $y = ax$

$(x-1)^2 + a^2x^2 = 1$

$x^2 - 2x + 1 + a^2x^2 = 1$

$(a^2+1)x^2 - 2x = 0$

$x\left((a^2+1)x - 2\right) = 0$

$x = 0$ met $y = 0 \Rightarrow A(0, 0) \lor x = \frac{2}{a^2+1}$ met $y = a \cdot \frac{2}{a^2+1}$. Dus $D(\frac{2}{a^2+1}, \frac{2a}{a^2+1})$.

84b Er geldt $x_C - x_E = x_D - x_C$ ofwel $x_E = 2x_C - x_D = 2 \cdot 1 - \frac{2}{a^2+1} = \frac{2(a^2+1)}{a^2+1} - \frac{2}{a^2+1} = \frac{2a^2}{a^2+1}$.

Ook geldt $y_C - y_E = y_D - y_C$ ofwel $y_E = 2y_C - y_D = 2 \cdot a - -\frac{2a}{a^2+1} = \frac{2a(a^2+1)}{a^2+1} - \frac{2a}{a^2+1} = \frac{2a^3}{a^2+1}$. Dus $E(\frac{2a^2}{a^2+1}, \frac{2a^3}{a^2+1})$.

84c BE: $y - 0 = \frac{\frac{2a^3}{a^2+1} - 0}{\frac{2a^2}{a^2+1} - 2}(x-2) \Rightarrow y = \frac{2a^3}{2a^2 - 2(a^2+1)}(x-2) \Rightarrow y = \frac{2a^3}{-2}(x-2) \Rightarrow y = -a^3x + 2a^3$.

BE snijdt m in $F \Rightarrow x_F = 1$ en $y_F = -a^3 \cdot 1 + 2a^3 = a^3$. Dus $F(1, a^3)$.

We weten nu $M(1, 0)$, $C(1, a)$, $F(1, a^3)$ en $B(2, 0) \Rightarrow MC = a$, $MF = a^3$ en $MB = 1$.

Er geldt: $MC^3 = a^3$ en $MF \cdot MB^2 = a^3 \cdot 1^2 = a^3$. Dus $MC^3 = MF \cdot MB^2$.

Diagnostische toets

D1a $(x, y) = (1, -4)$ voldoet aan $3px + y = p + 2 \Rightarrow 3p \cdot 1 - 4 = p + 2 \Rightarrow 3p - 4 = p + 2 \Rightarrow 2p = 6 \Rightarrow p = 3.$

D1b $\left.\begin{array}{l} 3px + y = p + 2 \text{ evenwijdig met} \\ 3x + 4y = 10 \text{ (zet } x,\ y \text{ en } = \text{ netjes onder elkaar)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3p}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{4}.$

D1c $\left.\begin{array}{l} 3px + y = p + 2 \text{ evenwijdig met } \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 3 \text{ ofwel} \\ 5x + 4y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3p}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow 12p = 5 \Rightarrow p = \frac{5}{12}.$

D1d $\left.\begin{array}{l} 3px + y = p + 2 \text{ of } y = -3px + p + 2 \text{ evenwijdig met} \\ x\text{-as } (y = 0) \text{ of } \quad y = \quad 0x \end{array}\right\} \Rightarrow -3p = 0 \Rightarrow p = 0.$

D2a $\left.\begin{array}{l} 3x + py = 6 \text{ evenwijdig met} \\ px + (p+6)y = p + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{p} = \frac{p}{p+6} \Rightarrow p^2 = 3p + 18 \Rightarrow p^2 - 3p - 18 = 0 \Rightarrow (p-6)(p+3) = 0 \Rightarrow p = 6 \ \vee \ p = -3.$

D2b
k_p: $3x + py = 6$ $\qquad l_p$: $px + (p+6)y = p + 2$
k_p: $py = -3x + 6$ $\qquad l_p$: $(p+6)y = -px + p + 2$
k_p: $y = -\frac{3}{p}x + \frac{6}{p}.$ $\qquad l_p$: $y = -\frac{p}{p+6}x + \frac{p+2}{p+6}.$
$k_p \perp l_p \Rightarrow \text{rc}_{k_p} \cdot \text{rc}_{l_p} = -1$
$-\frac{3}{p} \cdot -\frac{p}{p+6} = -1$
$\frac{3p}{p(p+6)} = -\frac{1}{1}$
$3p = -p(p+6)$
$3p = -p^2 - 6p$
$p^2 + 9p = 0$
$p(p+9) = 0$
$p = 0 \ \vee \ p = -9.$

D2c
$\left.\begin{array}{l} k_p\text{: } 3x + py = 6 \\ x = 0 \text{ (de } y\text{-as)} \end{array}\right\} \Rightarrow py = 6$ ❶
$\left.\begin{array}{l} l_p\text{: } px + (p+6)y = p + 2 \\ x = 0 \text{ (de } y\text{-as)} \end{array}\right\} \Rightarrow (p+6)y = p + 2$ ❷
$\begin{cases} py = 6 \text{ ❶} \\ (p+6)y = p + 2 \text{ ❷} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{p} \text{ ❸} \\ (p+6)y = p + 2 \text{ ❷} \end{cases}$
❸ in ❷ geeft: $(p+6) \cdot \frac{6}{p} = p + 2 \qquad (p \neq 0)$
$(p+6) \cdot 6 = p(p+2) \qquad (p \neq 0)$
$6p + 36 = p^2 + 2p \qquad (p \neq 0)$
$p^2 - 4p - 36 = 0 \qquad (p \neq 0)$
$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -36 = 160 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{160} = \sqrt{16 \cdot 10} = 4\sqrt{10}$
$p = \frac{4 - 4\sqrt{10}}{2} = 2 - 2\sqrt{10} \ \vee \ p = \frac{4 + 4\sqrt{10}}{2} = 2 + 2\sqrt{10}.$

D3a Cirkel met middelpunt $A(2, -1)$ geeft $(x-2)^2 + (y+1)^2 = r^2.$
Deze cirkel gaat door $B(4, 5) \Rightarrow (4-2)^2 + (5+1)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$
De vergelijking van de cirkel met middelpunt $A(2, -1)$ door $B(4, 5)$ is $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 40.$

D3b M op mll m van A en $B \Rightarrow d(M, A) = d(M, B).$
$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-4)^2 + (y-5)^2$
$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25$
$4x + 12y = 36.$ Dus m: $x + 3y = 9.$

M op mll n van A en $C \Rightarrow d(M, A) = d(M, C).$
$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2}$
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2$
$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9$
$8x + 8y = 40.$ Dus n: $x + y = 5.$

$\begin{cases} x + 3y = 9 \text{ ❶} \\ x + \ \ y = 5 \text{ ❷} \end{cases} -$
$2y = 4 \Rightarrow y = 2$ in❷ $\Rightarrow x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3.$ Dus het middelpunt M van de omcirkel van ΔABC is $M(3, 2).$
De straal $r = d(M, A) = MA = \sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$

D3c Het midden van lijnstuk AB is $N\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = N(3, 2).$
De straal $r = d(N, A) = NA = \sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$
De vergelijking van de cirkel met middelpunt $N(3, 2)$ en straal $r = NA$ is $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10.$

D4a $P(x, y)$ op een bissectrice van k en l geeft $d(P, k) = d(P, l).$
$\frac{|x + 2y - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2x + y - 10|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |x + 2y - 6| = |-2x + y - 10|$
$x + 2y - 6 = -2x + y - 10 \ \vee \ x + 2y - 6 = -(-2x + y - 10)$
$3x + y = -4 \ \vee \ x + 2y - 6 = 2x - y + 10$
Dus m: $3x + y = -4$ en n: $-x + 3y = 16.$

D4b $P(0, y)$ (punten op de y-as) op afstand 2 van k geeft $d(P, k) = 2.$
$\frac{|0 + 2y - 6|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow |2y - 6| = 2\sqrt{5} \Rightarrow 2y - 6 = \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow 2y = 6 \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow y = 3 \pm \sqrt{5}.$
Dit geeft de punten $(0, 3 + \sqrt{5})$ en $(0, 3 - \sqrt{5}).$

D5a De vergelijking van BC is $x=4$. Dus $d(A,BC)=|x_A-4|=|2-4|=2$.

D5b AB: $y-1=\frac{2-1}{4-2}(x-2)$ ofwel $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$ ofwel $y-1=\frac{1}{2}x-1$ ofwel $y-\frac{1}{2}x=0$ ofwel $x-2y=0$.
$P(x,0)$ (punten op de x-as) met $d(P,AB)=d(P,BC)$
$\frac{|x-2\cdot 0|}{\sqrt{5}}=\frac{|x-4|}{1}\Rightarrow |x|=\sqrt{5}|x-4|$
$x=\sqrt{5}(x-4)\ \vee\ x=-\sqrt{5}(x-4)$
$x=\sqrt{5}x-4\sqrt{5}\ \vee\ x=-\sqrt{5}x+4\sqrt{5}$
$(1-\sqrt{5})x=-4\sqrt{5}\ \vee\ (1+\sqrt{5})x=4\sqrt{5}$
$x=\frac{-4\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{-4\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{-4\sqrt{5}-20}{1-5}=\frac{-4\sqrt{5}-20}{-4}=5+\sqrt{5}\ \vee\ x=\frac{4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}-20}{1-5}=\frac{4\sqrt{5}-20}{-4}=5-\sqrt{5}$.
Dit geeft de punten $(5-\sqrt{5},0)$ en $(5+\sqrt{5},0)$.

D6a k: $2x+3y=12$ gaat door $(6,0)$ en heeft $n=\binom{2}{3}\Rightarrow r=\binom{3}{-2}$. Dus $\binom{x}{y}=\binom{6}{0}+\lambda\binom{3}{-2}$.

D6b l: $x=-2+3\lambda\ \wedge\ y=5-4\lambda$ gaat door $(-2,5)$ en heeft $r=\binom{3}{-4}\Rightarrow n=\binom{4}{3}$. Dus l: $4x+3y=7$ $(4\cdot -2+3\cdot 5)$.

D7 Stel $P(\lambda,0)\Rightarrow OP=\lambda$ en $OQ=\frac{1}{3}\lambda$
$Q(x,\frac{3}{4}x)\Rightarrow OQ=\sqrt{x^2+(\frac{3}{4}x)^2}=\sqrt{x^2+\frac{9}{16}x^2}=\sqrt{\frac{25}{16}x^2}=\frac{5}{4}x$ $\Bigg\}\Rightarrow \frac{5}{4}x=\frac{1}{3}\lambda\Rightarrow x_Q=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\lambda=\frac{4}{15}\lambda$ en
$y_Q=\frac{3}{4}x_Q=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{15}\lambda=\frac{3}{15}\lambda=\frac{1}{5}\lambda$
Het midden M van PQ is dan $(\frac{\lambda+\frac{4}{15}\lambda}{2},\frac{0+\frac{1}{5}\lambda}{2})=(\frac{19}{30}\lambda,\frac{1}{10}\lambda)$.
M ligt op lijn met $\underline{s}=\binom{0}{0}$ en $\underline{r}=\binom{19}{3}\Rightarrow \underline{n}=\binom{3}{-19}$. Dus een vergelijking van de lijn: $3x-19y=0$ (want $3\cdot 0-19\cdot 0=0$).

D8a $x^2+y^2+ax-4y+13=0$
$(x+\frac{1}{2}a)^2-\frac{1}{4}a^2+(y-2)^2-4+13=0$
$(x+\frac{1}{2}a)^2+(y-2)^2=\frac{1}{4}a^2-9$
Dit stelt een cirkel voor als ⇨
$\frac{1}{4}a^2-9\geq 0$
$\frac{1}{4}a^2\geq 9$
$a^2\geq 36$
$|a|\geq 6$. Dus $a\leq -6\ \vee\ a\geq 6$.

D8b $(x+\frac{1}{2}a)^2+(y-2)^2=\frac{1}{4}a^2-9$, dus middelpunt $M(-\frac{1}{2}a,2)$.
l: $2x+3y=5$
$M(-\frac{1}{2}a,2)$ op l $\Big\}\Rightarrow 2\cdot -\frac{1}{2}a+3\cdot 2=5\Rightarrow -a+6=5\Rightarrow -a=-1\Rightarrow a=1$.
Als M op l ligt, dan is $a=1$ en dat kan niet omdat $x^2+y^2+ax-4y+13=0$
alleen een cirkel voorstelt voor $a\leq -6\ \vee\ a\geq 6$ (zie D8a).

D9a k: $-x-3y=10$ of k: $x+3y=-10$.

D9b Van de cirkel is $M(0,0)$ en $r=\sqrt{10}$.
Stel l: $y=3x+b$, dus l: $3x-y+b=0$.
Raken, dus $d(M,l)=r$.
$\frac{|0+0+b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}\Rightarrow\frac{|b|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$
$|b|=10\Rightarrow b=-10\ \vee\ b=10$.
Dus l_1: $y=3x-10$ en l_2: $y=3x+10$.

D9c Stel n: $y-2=a(x-4)$, dus $ax-y+2-4a=0$.
Raken, dus $d(M,n)=r$.
$\frac{|0-0+2-4a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}\Rightarrow\frac{|2-4a|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{10}$
$|2-4a|=\sqrt{10a^2+10}$ (kwadrateren)
$4-16a+16a^2=10a^2+10$
$6a^2-16a-6=0$
$3a^2-8a-3=0$
$D=(-8)^2-4\cdot 3\cdot -3=64+36=100\Rightarrow\sqrt{D}=10$
$a=\frac{8-10}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}\ \vee\ a=\frac{8+10}{6}=\frac{18}{6}=3$.
Dus n_1: $-\frac{1}{3}x-y+\frac{10}{3}=0$ en n_2: $3x-y-10=0$.

D9d Van de cirkel is $M(0,0)$ en $r=\sqrt{10}$.
p loodrecht op m: $3x+y-5=0$ dus p: $x-3y=c$.
Raken, dus $d(M,p)=r$.
$\frac{|0+0-c|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}\Rightarrow\frac{|-c|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$
$|-c|=|c|=10\Rightarrow c=-10\ \vee\ c=10$.
Dus p_1: $x-3y=-10$ en p_2: $x-3y=10$.

D10a $x^2+y^2-6x-4y=0$
$(x-3)^2-9+(y-2)^2-4=0$
$(x-3)^2+(y-2)^2=13$.

De poollijn p van $(-3,4)$ ten opzichte van de cirkel is
p: $(-3-3)(x-3)+(4-2)(y-2)=13$
p: $-6x+18+2y-4=13$
p: $-6x+2y=-1$.

D10b De poollijn p van $(2,\,-3)$ ten opzichte van de cirkel is p: $(2-3)(x-3)+(-3-2)(y-2)=13$
uitgeschreven p: $-x+3-5y+10=13$ of p: $-x-5y=0$.

$$\begin{cases} -5y = x \text{ ❶} \\ x^2+y^2-6x-4y=0 \text{ ❷} \end{cases}$$

❶ in❷ $\Rightarrow 25y^2+y^2+30y-4y=0 \Rightarrow 26y^2+26y=0 \Rightarrow y(y+1)=0 \Rightarrow y=0 \;\vee\; y=-1.$
$y=0 \Rightarrow x=0$. De raaklijn in $(0,\,0)$ is $(0-3)(x-3)+(0-2)(y-2)=13 \Rightarrow -3x+9-2y+4=13$, dus $3x-2y=0$.
$y=-1 \Rightarrow x=5$. De raaklijn in $(5,\,-1)$ is $(5-3)(x-3)+(-1-2)(y-2)=13 \Rightarrow 2x-6-3y+6=13$, dus $2x-3y=13$.

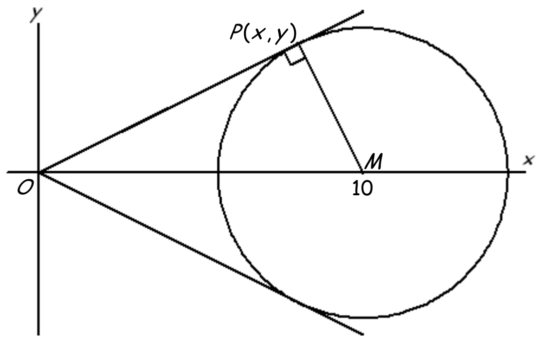
D11a Voor r van c_2 geldt: $r^2=(-2)^2+(-2)^2-6\cdot-2+8\cdot-2+5=4+4+12-16+5=9$.
Dus c_2: $(x+2)^2+(y+2)^2=9$.

D11b $(3+2\lambda)^2+(-4+\lambda)^2-6(3+2\lambda)+8(-4+\lambda)+5=5$
$9+12\lambda+4\lambda^2+16-8\lambda+\lambda^2-18-12\lambda-32+8\lambda+5=5$
$5\lambda^2-25=0$
$\lambda^2=5 \Rightarrow \lambda=-\sqrt{5} \;\vee\; \lambda=\sqrt{5}$. De punten zijn $(3-2\sqrt{5},\,=-4-\sqrt{5})$ en $(3+2\sqrt{5},\,=-4+\sqrt{5})$.

D12 De machtlijn van c_1 en c_2 is m: $x^2+y^2-4x-2y=(x-4)^2+(y+1)^2-1$
m: $x^2+y^2-4x-2y=x^2-8x+16+y^2+2y+1-1$
m: $4x-4y-16=0$ ofwel $x-y=4$ (de machtlijn gaat door de snijpunten van de cirkels).

$$\begin{cases} x=y+4 \text{ ❶} \\ x^2+y^2-4x-2y=0 \text{ ❷} \end{cases}$$
Nu ❶ in❷ $\Rightarrow (y+4)^2+y^2-4(y+4)-2y=0 \Rightarrow$
$y^2+8y+16+y^2-4y-16-2y=0 \Rightarrow 2y^2+2y=0 \Rightarrow 2y(y+1)=0 \Rightarrow y=0 \;\vee\; y=-1.$
$y=0 \Rightarrow x=4$ en $y=-1 \Rightarrow x=3$. De snijpunten zijn $(4,\,0)$ en $(3,\,-1)$.

D13 Noem het raakpunt $P(x,\,y)$.



$OP \perp MP \Rightarrow$
$rc_{OP}\cdot rc_{MP}=-1$
$\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{x-10}=-1$
$\frac{y^2}{x^2-10x}=-1$
$y^2=-x^2+\;10x$
$x^2+y^2-10x=0$
$(x-5)^2-25+y^2=0$
$(x-5)^2+y^2=25$. Alle punten liggen op een cirkel met $M(5,\,0)$ en $r=5$.

Gemengde opgaven 9. Lijnen en cirkels

G1a $k_p \,/\!/\, l_p \Rightarrow \text{rc}_{k_p} = \text{rc}_{l_p}$

$\frac{p+1}{p-2} = \frac{p-4}{p+5}$

$(p+1)(p+5) = (p-4)(p-2)$

$p^2 + 6p + 5 = p^2 - 6p + 8$

$12p = 3$

$p = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

G1b $k_p \perp l_p \Rightarrow \text{rc}_{k_p} \cdot \text{rc}_{l_p} = -1$

$\frac{p+1}{p-2} \cdot \frac{p-4}{p+5} = -1$

$(p+1)(p-4) = -(p-2)(p+5)$

$p^2 - 3p - 4 = -(p^2 + 3p - 10)$

$p^2 - 3p - 4 = -p^2 - 3p + 10$

$2p^2 = 14 \Rightarrow p^2 = 7$

$p = -\sqrt{7} \;\vee\; p = \sqrt{7}$.

G1c Snijden met de x-as ($y = 0$) geeft

k_p: $(p+1)x = 3$ en l_p: $(p-4)x = -6$

ofwel k_p: $px + x = 3$ en l_p: $px - 4x = -6$

$\begin{cases} px + x = 3 \;❶ \\ px - 4x = -6 \;❷ \end{cases}$ $-$

$5x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{5}$ in ❶ geeft

$p \cdot \frac{9}{5} + \frac{9}{5} = 3 \Rightarrow \frac{9}{5}p = \frac{6}{5} \Rightarrow 9p = 6 \Rightarrow p = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

G1d Snijden met de y-as ($x = 0$) geeft

k_p: $(p-2)y = 3$ en l_p: $(p+5)y = -6$

ofwel k_p: $py - 2y = 3$ en l_p: $py + 5y = -6$

$\begin{cases} py - 2y = 3 \;❶ \\ py + 5y = -6 \;❷ \end{cases}$ $-$

$-7y = 9 \Rightarrow y = -\frac{9}{7}$ in ❷ geeft

$p \cdot -\frac{9}{7} + 5 \cdot -\frac{9}{7} = -6 \Rightarrow -\frac{9}{7}p = \frac{3}{7} \Rightarrow -9p = 3 \Rightarrow p = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$.

G1e k_p en $m_{p,q}$ vallen samen als $\frac{p+1}{p-4} = \frac{p-2}{p+5} = \frac{3}{q}$ dus $\frac{p+1}{p-4} = \frac{p-2}{p+5}$ en $\frac{p+1}{p-4} = \frac{3}{q}$.

$\frac{p+1}{p-4} = \frac{p-2}{p+5}$ en $\frac{p+1}{p-4} = \frac{3}{q}$ ❷

$(p+1)(p+5) = (p-2)(p-4)$

$p^2 + 6p + 5 = p^2 - 6p + 8$

$12p = 3$

$p = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ❶

❶ in ❷ geeft $\frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}-4} = \frac{3}{q} \Rightarrow \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{15}{4}} = \frac{3}{q} \Rightarrow \frac{5}{-15} = \frac{3}{q} \Rightarrow 5q = -45 \Rightarrow q = -9$.

Dus $p = \frac{1}{4}$ en $q = -9$.

G2a Stel $P(x, y)$

$d(P, l) = \frac{|3x+4y|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3x+4y|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x+4y|}{5}$

$d(P, l) = 5 \Rightarrow \frac{|3x+4y|}{5} = 5 \Rightarrow |3x+4y| = 25$

$\Rightarrow 3x + 4y = 25 \;\vee\; 3x + 4y = -25$

$d(P, A) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$

$d(P, A) = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 5$

(kwadrateren geeft) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

$\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \;❶ \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \;❷ \end{cases}$ $\vee$ $\begin{cases} 3x + 4y = -25 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4} \;❸ \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \;❷ \end{cases}$

❶ in ❷ geeft $(x-2)^2 + (-\frac{3}{4}x + \frac{13}{4})^2 = 25$

```
2*-3*13
                -78
-4*16-78
               -142
4*16+169-25*16
               -167
```

$x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{78}{16}x + \frac{169}{16} = 25$

$\frac{25}{16}x^2 - \frac{142}{16}x - \frac{167}{16} = 0$

```
(-142)²-4*25*-16
7
              36864
√(Ans)
                192
```

$25x^2 - 142x - 167 = 0$

$D = 36\,864 \Rightarrow \sqrt{D} = 192$

$\begin{cases} x = \frac{142+192}{50} = \frac{334}{50} = \frac{167}{25} \\ \text{in ❶} \Rightarrow y = \frac{31}{25} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{142-192}{50} = \frac{-50}{50} = -1 \\ \text{in ❶} \Rightarrow y = \frac{28}{4} = 7 \end{cases}$

```
(142+192)/50▸Fra
c
            167/25
-3/4Ans+25/4▸Fra
c
             31/25
```

```
(142-192)/50▸Fra
c
                -1
-3/4Ans+25/4▸Fra
c
                 7
```

Dus de punten zijn: $(\frac{167}{25}, \frac{31}{25})$ en $(-1, 7)$.

❸ in ❷ geeft $(x-2)^2 + (-\frac{3}{4}x - \frac{37}{4})^2 = 25$

$x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{222}{16}x + \frac{1369}{16} = 25$

```
2*-3*-37
                222
(-37)²
               1369
4*16+1369-15*16
               1193
```

$\frac{25}{16}x^2 + \frac{158}{16}x + \frac{1193}{16} = 0$

$25x^2 + 158x + 1193 = 0$

$D < 0 \Rightarrow$ hier geen oplossingen.

```
222-4*16
                158
158²-4*25*1193
             -94336
```

G2b Stel $P(x, y)$

$d(P, l) = d(P, A)$ met $y = 3$ geeft

$\frac{|3x + 4 \cdot 3|}{\sqrt{25}} = \sqrt{(x-2)^2 + (3-3)^2}$

$\frac{|3x+12|}{5} = \sqrt{(x-2)^2}$

$|3x+12| = 5|x-2|$

$3x + 12 = 5x - 10 \;\vee\; 3x + 12 = -5x + 10$

$-2x = -22 \;\vee\; 8x = -2$

$x = 11 \;\vee\; x = -\frac{1}{4}$.

Dus de punten zijn: $(11, 3)$ en $(-\frac{1}{4}, 3)$.

G2c Stel $P(x, y)$

$d(P, l) = d(P, A)$ geeft

$\frac{|3x+4y|}{\sqrt{25}} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$

$|3x+4y| = 5 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$

$(3x+4y)^2 = 25((x-2)^2 + (y-3)^2)$

$9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9)$

$9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25x^2 - 100x + 100 + 25y^2 - 150y + 225$

$-16x^2 - 9y^2 + 24xy + 100x + 150y - 325 = 0$

P op de kromme: $16x^2 + 9y^2 - 24xy - 100x - 150y + 325 = 0$.

G3a c_1: $x^2+y^2+8x-4y+4=0$
c_2: $x^2+6x+9+y^2-2y+1=1$
De machtlijn van c_1 en c_2 is $\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+8x-4y+4=\cancel{x^2}+6x+9+\cancel{y^2}-2y$ dus $2x-2y=5$.
$\begin{cases}2x-2y=5\\x^2+y^2+8x-4y+4=0\end{cases}$ geeft $\begin{cases}x=y+\frac{5}{2} \text{ ❶}\\x^2+y^2+8x-4y+4=0 \text{ ❷}\end{cases}$
❶ in ❷ geeft $(y+\frac{5}{2})^2+y^2+8(y+\frac{5}{2})-4y+4=0$
$y^2+5y+\frac{25}{4}+y^2+8y+20-4y+4=0$
$2y^2+9y+30\frac{1}{4}=0$ met $D=9^2-4\cdot2\cdot30\frac{1}{4}<0 \Rightarrow$ er zijn geen reële oplossingen.
De machtlijn van c_1 en c_2 en cirkel c_1 hebben geen punten gemeenschappelijk $\Rightarrow c_1$ en c_2 ook geen punten gemeen.

G3b c_1: $x^2+y^2+8x-4y+4=0 \Rightarrow (x+4)^2-16+(y-2)^2-4+4=0 \Rightarrow (x+4)^2+(y-2)^2=16$.
c_1 is de cirkel met $M_1(-4,2)$ en c_2 is de cirkel met $M_2(-3,1) \Rightarrow M_1 \neq M_2 \Rightarrow$ de cirkels zijn niet concentrisch.

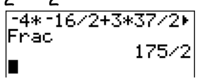
G3c $d(M_2,A)=\sqrt{(-3--5)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}>r_2 \Rightarrow A$ ligt buiten c_2.

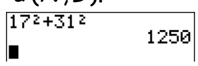
G3d De macht $A(-5,2)$ van ten opzichte van c_2 is $(-5+3)^2+(2-1)^2-1=2^2+1^2-1=4$.

G3e $M_3=M_1(-4,2)$ (gegeven) en voor r van c_3 geldt: $r^2=(-4+3)^2+(2-1)^2-1=1$ (r^2 de macht is van M_3 t.o.v. van c_2).
Dus c_3: $(x+4)^2+(y-2)^2=1$.

G3f M_4 ligt op de machtlijn van c_1 en c_2. Deze machtlijn is: $2x-2y=5$ $(x^2+y^2+8x-4y+4=(x+3)^2+(y-1)^2-1)$.
$0^2+2^2+8\cdot0-4\cdot2+4=0 \Rightarrow B(0,2)$ op c_1.
Raaklijn in $B(0,2)$ aan c_1: $(0+4)(x+4)+(2-2)(y-2)=16 \Rightarrow 4x+14=16 \Rightarrow x=0$.
$x=0$ invullen in $2x-2y=5$ geeft $2\cdot0-2y=5 \Rightarrow 2y=-5 \Rightarrow y=-\frac{5}{2}$.
Dus $M_4(0,\ -\frac{5}{2})$ en $r^2=0^2+(-\frac{5}{2})^2+8\cdot0-4\cdot-\frac{5}{2}+4=\frac{25}{4}+10+4=20\frac{1}{4}$. Dus c_4: $x^2+(y+\frac{5}{2})^2=20\frac{1}{4}$.

G4a c_1: $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ ❶
De poollijn van $Q(-22,29)$ t.o.v. de cirkel is:
$(-22-3)(x-3)+(29-4)(y-4)=25$
$-25x+75+25y-100=25$
$-25x+25y=50$
$y=x+2$ ❷
❶ in ❷ geeft $(x-3)^2+(x+2-4)^2=25$
$(x-3)^2+(x-2)^2=25$
$x^2-6x+9+x^2-4x+4=25$
$2x^2-10x-12=0$
$x^2-5x-6=0$
$(x-6)(x+1)=0$
$x=6 \vee x=-1$ in ❶
$A(6,8)$ en $B(-1,1)$. (hiernaast verder)

Het middelpunt van de omcirkel van ΔABQ is
het snijpunt van de middelloodlijnen van ΔABQ.
Het midden van AB is $(\frac{6+-1}{2},\ \frac{8+1}{2})=(\frac{5}{2},\ \frac{9}{2})$ en $\underline{r}_{AB}=\begin{pmatrix}-7\\-7\end{pmatrix}=-7\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
Middelloodlijn van AB: $1\cdot x+1\cdot y=c$ door $(\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}) \Rightarrow x+y=\frac{14}{2}=7$.
Het midden van AQ is $(-\frac{16}{2},\ \frac{37}{2})$ en $\underline{r}_{AQ}=\begin{pmatrix}-28\\21\end{pmatrix}=7\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.
De mll. van AQ is $-4x+3y=c$ door $(-\frac{16}{2},\ \frac{37}{2}) \Rightarrow -4x+3y=\frac{175}{2}$.
$\begin{cases}x+y=7 \text{ ❸}\\-4x+3y=\frac{175}{2} \text{ ❹}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=7-x \text{ ❺}\\-4x+3y=\frac{175}{2} \text{ ❹}\end{cases}$


❺ in ❹ $\Rightarrow -4x+21-3x=\frac{175}{2} \Rightarrow -7x=\frac{133}{2} \Rightarrow x=-\frac{19}{2}$ in ❸ $\Rightarrow y=\frac{33}{2}$.
Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔABQ is $N(-\frac{19}{2},\ \frac{33}{2})$
en de straal van de omgeschreven cirkel is $d(N,A)=d(N,B)$.
$r=\sqrt{(-1+\frac{19}{2})^2+(1-\frac{33}{2})^2}=\sqrt{\frac{1250}{4}}=\sqrt{\frac{625}{4}\cdot2}=\frac{25}{2}\sqrt{2}$.


G4b Het midden van AB is $(\frac{6+-1}{2},\ \frac{8+1}{2})=(\frac{5}{2},\ \frac{9}{2})$ en $2r=d(A,B)=\sqrt{(-1-6)^2+(1-8)^2}=\sqrt{7^2+7^2}=\sqrt{2\cdot7^2}=7\sqrt{2}$.
$r=\frac{1}{2}d(A,B)=\frac{7}{2}\sqrt{2}$. Dus c_2: $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{9}{2})^2=(\frac{7}{2}\sqrt{2})^2$ ofwel c_2: $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{9}{2})^2=\frac{49}{2}$.

G4c De machtlijn van c_1 en c_2 is: $-x+y=2$ $((x-3)^2+(y-4)^2-25=(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{9}{2})^2-\frac{49}{2})$.
De raaklijn in $P(7,7)$ aan c_1: $(7-3)(x-3)+(7-4)(y-4)=25 \Rightarrow 4x-12+3y-12=25 \Rightarrow 4x+3y=49$.
$\begin{cases}-x+\ \ y=\ \ 2 \text{ ❶}\\4x+3y=49 \text{ ❷}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4x+4y=\ \ 8 \text{ ❸}\\\ \ 4x+3y=49 \text{ ❷}\end{cases}$ +
$7y=57 \Rightarrow y=\frac{57}{7}$ in ❶ $\Rightarrow x=\frac{43}{7}$. Dus $M(\frac{43}{7},\ \frac{57}{7})$.
Verder is $r^2=MP^2=(7-\frac{43}{7})^2+(7-\frac{57}{7})^2=(\frac{6}{7})^2+(-\frac{8}{7})^2=\frac{36}{49}+\frac{64}{49}=\frac{100}{49} \Rightarrow c_3$: $(x-\frac{43}{7})^2+(y-\frac{57}{7})^2=\frac{100}{49}$.

G5a De gevraagde punten liggen op de middelloodlijn m van AB, dat is de lijn door de middelpunten van c_1 en c_2.
c_1: $x^2+y^2+6x-14y+9=0$ ofwel $(x+3)^2+(y-7)^2-9-49+9=0 \Rightarrow M_1(-3,7)$.
c_2: $(x+1)^2+(y-1)^2=9 \Rightarrow M_2(-1,1)$.
De lijn door M_1 en M_2: $y-1=\frac{7-1}{-3--1}(x+1) \Rightarrow y-1=\frac{6}{-2}(x+1) \Rightarrow y-1=-3(x+1) \Rightarrow y-1=-3x-3 \Rightarrow y=-3x-2$.

Nu de lijn M_1M_2: $y = -3x - 2$ ❶ snijden met c_1: $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 9 = 0$ ❷.

❶ in ❷ $\Rightarrow x^2 + (-3x-2)^2 + 6x - 14 \cdot (-3x-2) + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 9x^2 + 12x + 4 + 6x + 42x + 28 + 9 = 0$

$10x^2 + 60x + 41 = 0$ met $D = 60^2 - 4 \cdot 10 \cdot 41 = 1960 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1960} = \sqrt{196 \cdot 10} = 14\sqrt{10} \Rightarrow x = \frac{-60 \pm 14\sqrt{10}}{20}$.

$x = \frac{-60+14\sqrt{10}}{20} = -3 + \frac{7}{10}\sqrt{10}$ in ❶ geeft $y = -3 \cdot (-3 + \frac{7}{10}\sqrt{10}) - 2 = 7 - \frac{21}{10}\sqrt{10} \Rightarrow (-3 + \frac{7}{10}\sqrt{10}, 7 - \frac{21}{10}\sqrt{10})$ en

$x = \frac{-60-14\sqrt{10}}{20} = -3 - \frac{7}{10}\sqrt{10}$ in ❶ geeft $y = -3 \cdot (-3 - \frac{7}{10}\sqrt{10}) - 2 = 7 + \frac{21}{10}\sqrt{10} \Rightarrow (-3 - \frac{7}{10}\sqrt{10}, 7 + \frac{21}{10}\sqrt{10})$.

G5b De gevraagde punten liggen op de poollijn van P t.o.v. c_1: $(-15+3)(x+3) + (0-7)(y-7) - 49 = 0$.

Nu de poollijn $-12x - 7y = 36$ ofwel $y = -\frac{12}{7}x - \frac{36}{7}$ ❶ snijden met c_1: $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 9 = 0$ ❷.

❶ in ❷ $\Rightarrow x^2 + (-\frac{12}{7}x - \frac{36}{7})^2 + 6x - 14 \cdot (-\frac{12}{7}x - \frac{36}{7}) + 9 = 0$

$x^2 + \frac{144}{49}x^2 + \frac{864}{49}x + \frac{1296}{49} + 6x + \frac{168}{7}x + \frac{504}{7} + 9 = 0$

$\frac{193}{49}x^2 + \frac{2334}{49}x + \frac{5265}{49} = 0$

$193x^2 + 2334x + 5265 = 0$

met $D = 2334^2 - 4 \cdot 193 \cdot 5265 = 1382976 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1382976} = 1176 \Rightarrow x = \frac{-2334 \pm 1176}{386}$.

$x = \frac{-2334+1176}{386} = -3$ in ❶ geeft $y = 0 \Rightarrow$ raakpunt $(-3, 0)$ en

$x = \frac{-2334-1176}{386} = -\frac{1755}{193}$ in ❶ geeft $y = \frac{2016}{193} \Rightarrow$ raakpunt $(-\frac{1755}{193}, \frac{2016}{193})$.

```
12²                 144
7²                   49
2*12*36             864
```

```
36²                1296
14*12               168
14*36               504
```

```
49+144              193
864+6*49+168*7     2334
1296+504*7+9*49    5265
```

```
2334²-4*193*5265
                1382976
√(Ans              1176
```

```
(-2334+1176)/386
                     -3
-12/7Ans-36/7         0
```

```
(-2334-1176)/386
▸Frac        -1755/193
-12/7Ans-36/7▸Frac
               2016/193
```

G5c De machtlijn van c_1 en c_2: $4x - 12y + 16 = 0$ ofwel $x = 3y - 4$ ($x^2 + y^2 + 6x - 14y + 9 = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 9$)

Stel een punt P op de machtlijn $(3\lambda - 4, \lambda)$ ❶, dan moet de macht van P t.o.v. (c_1 en) c_2 81 zijn:

$(3\lambda - 4 + 1)^2 + (\lambda - 1)^2 - 9 = 81 \Rightarrow (3\lambda - 3)^2 + (\lambda - 1)^2 - 9 = 81 \Rightarrow 9\lambda^2 - 18\lambda + 9 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 9 = 81 \Rightarrow$

$10\lambda^2 - 20\lambda - 80 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \ \vee \ \lambda = -2$.

$\lambda = 4$ in❶ $\Rightarrow C(8, 4)$ en $\lambda = -2$ in❶ $\Rightarrow D(-10, -2)$.

G6a $AM^2 = OA^2 + OM^2 = a^2 + m^2$ (Pythagoras in $\triangle OAM$ met $\angle O = 90°$) met $CM = AM = r \Rightarrow CM^2 = AM^2 = a^2 + m^2$

$PM^2 = OP^2 + OM^2 = p^2 + m^2$ (Pythagoras in $\triangle OPM$ met $\angle O = 90°$)

$PM^2 = PC^2 + CM^2$ (Pythagoras in $\triangle PCM$ met $\angle C = 90°$) $\Rightarrow PC^2 = PM^2 - CM^2 = p^2 + m^2 - (a^2 + m^2) = p^2 - a^2$.

G6b $PA = p - a$ en $PB = p - -a = p + a \Rightarrow PA \cdot PB = (p-a)(p+a) = p^2 - a^2$ (zie ook G6a). Dus $PA \cdot PB = PC^2$.

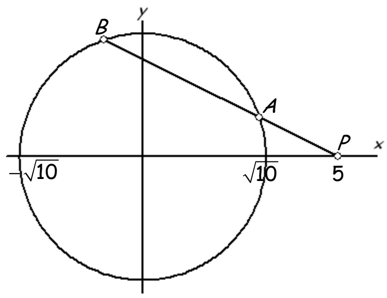
G6c De macht van $P(5, 0)$ t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = 10$ is $5^2 + 0^2 - 10 = 25 - 10 = 15$.

Volgens de machtstelling geldt: $PA \cdot PB = 15$, dus

$PA \cdot (PA + 2\sqrt{5}) = 15 \Rightarrow PA^2 + 2\sqrt{5} \cdot PA - 15 = 0$

$D = (2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15 = 20 + 60 = 80 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \Rightarrow PA = \frac{-2\sqrt{5} \pm 4\sqrt{5}}{2}$

$PA = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ (voldoet) $\vee$ $PA = \frac{-6\sqrt{5}}{2} = -3\sqrt{5}$ (vold. niet)



$PA = \sqrt{5} \Rightarrow A$ op de cirkel met $M = P$ en $r = \sqrt{5}$. (gegeven: A ook op cirkel $x^2 + y^2 = 10$)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \text{ ❶} \\ (x-5)^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \qquad\qquad + y^2 = 10 \\ x^2 - 10x + 25 + y^2 = \ 5 \end{cases} -$$

$10x - 25 \qquad = 5 \Rightarrow 10x = 30 \Rightarrow x = 3$ in ❶ $\Rightarrow 9 + y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

De twee punten A zijn $A_1(3, 1)$ en $A_2(3, -1)$.

B op de cirkel met middelpunt P en $r = 3\sqrt{5}$. (gegeven: B ook op cirkel $x^2 + y^2 = 10$)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \text{ ❶} \\ (x-5)^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \qquad\qquad + y^2 = 10 \\ x^2 - 10x + 25 + y^2 = 45 \end{cases} -$$

$10x - 25 \qquad = -35 \Rightarrow 10x = -10 \Rightarrow x = -1$ in ❶ $\Rightarrow 1 + y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$.

Dus $A_1(3, 1)$ met daarbij $B_1(-1, 3)$ of de mogelijkheid: $A_2(3, -1)$ met daarbij $B_2(-1, -3)$.

G7a Zwaartelijn z_1 door $A(a, 0)$ en het midden $D(\frac{1}{2}b, 1\frac{1}{2})$ van BC is $y - 0 = \frac{1\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}b - a}(x - a)$ ofwel $y = \frac{3}{b - 2a}(x - a)$ ❶.

Zwaartelijn z_2 door $B(b, 0)$ en het midden $(\frac{1}{2}a, 1\frac{1}{2})$ van AC is $y - 0 = \frac{1\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}a - b}(x - b)$ ofwel $y = \frac{3}{a - 2b}(x - b)$ ❷.

Zwaartelijn z_3 door $C(0, 3)$ en midden $(\frac{a+b}{2}, 0)$ van AB is $y - 0 = \frac{0 - 3}{\frac{a+b}{2} - 0}(x - \frac{a+b}{2})$ ofwel $y = -\frac{6}{a+b}(x - \frac{a+b}{2})$ ❸.

❶ in ❷ $\Rightarrow \frac{3}{b-2a}(x - a) = \frac{3}{a-2b}(x - b) \Rightarrow \frac{3}{b-2a}x - \frac{3a}{b-2a} = \frac{3}{a-2b}x - \frac{3b}{a-2b} \Rightarrow$

$$\left(\frac{3}{b-2a} - \frac{3}{a-2b}\right)x = \frac{3a}{b-2a} - \frac{3b}{a-2b} \Rightarrow \frac{3(a-2b) - 3(b-2a)}{(b-2a)(a-2b)}x = \frac{3a(a-2b) - 3b(b-2a)}{(b-2a)(a-2b)} \Rightarrow$$

$x = \frac{3a(a-2b)-3b(b-2a)}{3(a-2b)-3(b-2a)} = \frac{a(a-2b)-b(b-2a)}{(a-2b)-(b-2a)} = \frac{a^2-2ab-b^2+2ab}{a-2b-b+2a} = \frac{a^2-b^2}{3a-3b} = \frac{(a+b)(a-b)}{3(a-b)} = \frac{a+b}{3}$ in ❶ $\Rightarrow$

$y = \frac{3}{b-2a}(\frac{a+b}{3}-a) = \frac{3}{b-2a}(\frac{a+b}{3}-\frac{3a}{3}) = \frac{3}{b-2a}\cdot\frac{a+b-3a}{3} = \frac{3}{b-2a}\cdot\frac{b-2a}{3} = 1$. Dus $Z(\frac{a+b}{3}, 1)$ is snijpunt van z_1 en z_2.

$Z(\frac{a+b}{3}, 1)$ voldoet ook aan ❸, immers $-\frac{6}{a+b}(\frac{a+b}{3}-\frac{a+b}{2}) = -\frac{6}{a+b}(\frac{3(a+b)}{6}-\frac{3(a+b)}{6}) = -\frac{6}{a+b}\cdot-\frac{a+b}{6} = -1$ klopt.

Dus z_1, z_2 en z_3 snijden elkaar in $Z(\frac{a+b}{3}, 1) \Rightarrow$ de (drie) zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt.

G7b $d(A,Z) = \sqrt{\left(a-\frac{a+b}{3}\right)^2+(0-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{3}-\frac{a+b}{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{\left(\frac{2a-b}{3}\right)^2+1} = \sqrt{\frac{4a^2-4ab+b^2}{9}+\frac{9}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{4a^2-4ab+b^2+9}$.

$d(D,Z) = \sqrt{\left(\frac{b}{2}-\frac{a+b}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3b}{6}-\frac{2(a+b)}{6}\right)^2+\frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{b-2a}{6}\right)^2+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{b^2-4ab+4a^2+9}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{4a^2-4ab+b^2+9}$.

Hier staat te lezen dat: $d(A,Z) = 2\cdot d(D,Z) \Rightarrow AZ = 2DZ \Rightarrow AZ : ZD = 2:1$.

G8 Stel $P(0, \lambda)$ en noem Q het punt $(0, 10)$.

Pythagoras: $PQ^2 + AQ^2 = AP^2 \Rightarrow (10-\lambda)^2 + AQ^2 = 10^2 \Rightarrow AQ^2 = 100-(10-\lambda)^2$. Dus $A(\sqrt{100-(10-\lambda)^2}, 10)$.

Het midden M van AP is het punt $M(\frac{\sqrt{100-(10-\lambda)^2}+0}{2}, \frac{10+\lambda}{2})$.

$x = \frac{\sqrt{100-(10-\lambda)^2}}{2}$ en $y = 5+\frac{1}{2}\lambda \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{100-(10-\lambda)^2}$ ❶ en $\lambda = 2y-10$ ❷

❷ in ❶ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{100-(10-2y+10)^2}$ (kwadrateren)

$x^2 = \frac{1}{4}(100-(20-2y))^2 = \frac{1}{4}\left(100-(400-80y+4y^2)\right) = \frac{1}{4}\left(100-400+80y-4y^2\right) = -75+20y-y^2 \Rightarrow$

$x^2+y^2-20y+75 = 0 \Rightarrow x^2+(y-10)^2-100+75 = 0 \Rightarrow x^2+(y-10)^2 = 25$.

Dus M ligt op de cirkel met middelpunt $(0, 10)$ en straal $r = 5$.

G9 Het midden Q van AP is het punt $Q(\frac{x_P+2}{2}, \frac{y_P+0}{2}) \Rightarrow x_Q = \frac{1}{2}x_P+1$ en $y_Q = \frac{1}{2}y_P \Rightarrow x_P = 2x_Q-2$ ❶ en $y_P = 2y_Q$ ❷

Voor P (op de eenheidscirkel) geldt: $x_P{}^2 + y_P{}^2 = 1$ ❸

Nu ❶ en ❷ in ❸ $\Rightarrow (2x_Q-2)^2 + (2y_Q)^2 = 1 \Rightarrow 2^2\cdot(x_Q-1)^2 + 2^2\cdot y_Q{}^2 = 1$ (delen door 4) $\Rightarrow (x_Q-1)^2 + y_Q{}^2 = \frac{1}{4}$.

Dus Q ligt op de cirkel met middelpunt $(1, 0)$ en straal $r = \frac{1}{2}$.

G10 $rc_l = m$ en l door $A(0,5) \Rightarrow l$: $y = mx+5$.

l snijdt de x-as ($y=0$) in $P \Rightarrow P(-\frac{5}{m}, 0)$.

$k \perp l$ en k door $A(0,5) \Rightarrow k$: $y = -\frac{1}{m}x+5$.

$p \perp x$-as en p door $P(-\frac{5}{m}, 0) \Rightarrow p$: $x = -\frac{5}{m}$.

k en p snijden elkaar in S, dus voor S geldt:

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{m}x+5 \\ x = -\frac{5}{m} \Rightarrow -\frac{1}{m} = \frac{1}{5}x \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{1}{5}x\cdot x+5 = \frac{1}{5}x^2+5$.

Dus alle punten S liggen op de parabool $y = \frac{1}{5}x^2+5$.

G11a $2\cdot d(P,A) = d(P,B)$

$2\cdot\sqrt{(x-6)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-12)^2+(y-2)^2}$ (kwadrateren)

$4\cdot((x-6)^2+(y+1)^2) = (x-12)^2+(y-2)^2$

$4\cdot(x^2-12x+36+y^2+2y+1) = x^2-24x+144+y^2-4y+4$

$4x^2-48x+144+4y^2+8y+4 = x^2-24x+144+y^2-4y+4$

$3x^2-24x+3y^2+12y = 0 \Rightarrow x^2-8x+y^2+4y = 0 \Rightarrow (x-4)^2-16+(y+2)^2-4 = 0 \Rightarrow (x-4)^2+(y+2)^2 = 20$.

De punten P liggen op de cirkel met middelpunt $(4, -2)$ en straal $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

G11b $d(P,C) = 4$

$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2} = 4$ (kwadrateren)

$(x+2)^2+(y-2)^2 = 16$

$x^2+4x+4+y^2-4y+4 = 16$

$\begin{cases} x^2+4x+y^2-4y = 8 \\ x^2-8x+y^2+4y = 0 \text{ ❶} \end{cases}$ (zie G11a) $-$

$12x \quad -8y = 8$

$3x-2y = 2$

$3x-2 = 2y$

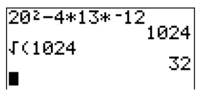
$y = \frac{3}{2}x-1$ in ❶

$x^2-8x+(\frac{3}{2}x-1)^2+4(\frac{3}{2}x-1) = 0$

$x^2-8x+\frac{9}{4}x^2-3x+1+6x-4 = 0$

$\frac{13}{4}x^2-5x-3 = 0$

$13x^2-20x-12 = 0$ met $D = (-20)^2-4\cdot13\cdot-12 = 1024$



$x = \frac{20\pm\sqrt{1024}}{26} = \frac{20\pm32}{26} \Rightarrow x = \frac{52}{26} = 2 \vee x = -\frac{12}{26} = -\frac{6}{13}$.

$x = 2$ in ❶ geeft $y = 2$ en

$x = -\frac{6}{13}$ in ❶ geeft $y = -\frac{22}{13}$.

De punten zijn $(2, 2)$ en $(-\frac{6}{13}, -\frac{22}{13})$.